Denis GUEDJ

Matematica explicată fiicelor mele

Traducere din franceză de

Alexandru ŞICLOVAN

EDITURA CARTIER
Editura Cartier, **SRL, str. Bucureşti, nr. 68, Chişinău, MD2012.**
Tel./fax: 24 05 87, tel.: 24 01 95. E-mall: cartler@cartler.md
Editura Codex **2000, SRL, Strada Toamnei, nr. 24, sectorul 2, Bucureşti.**
Tel./fax: 210 80 51. E-mall: codexcartler@gmall.com www.cartier.md
Difuzare:
Bucureşti: **Strada Toamnei, nr. 24, sectorul 2.**
Tel./fax: 210 80 51. E-mail: codexcartler@gmall.com
Chişinău: **bd. Mircea cel Bătrân, nr. 9, sectorul Ciocana. Tel.:34 64 61.**

Cărţile CARTIER pot fi procurate în toate librăriile bune din România şl Republica Moldova. LIBRĂRIILE CARTIER
Casa Cărţii, **bd. Mircea cel Bătrân, nr. 9, Chişinău. Tel.: 34 64 61.**
Librăria din Hol, **str. Bucureşti, nr. 68, Chişinău. Tel./fax: 2410 00.**
Librăria Vărul Shakespeare, **str. Şdusev, nr. 113, Chişinău. Tel.: 23 21 22.**

Colecţia *Verde* este coordonată de Vitalle Coroban
Editor: Gheorghe Erizanu
Lector: Valentin Guţu
Coperta: Vitalle Coroban
Tehnoredactare: Marina Fusa
Prepress: Editura Cartier
Tipar: Combinatul Poligrafic (nr. 81541)

Denis GUEDJ
Les mathématiques expliquées à mes filles

Denis GUEDJ
Matematica explicată fiicelor mele
Ediţia I, iunie 2008

Descrierea CIP a Camerei Naţionale a Cărţii
Guedj, Denis
Matematica explicată fiicelor mele / Denis Guedj; trad. : Alexandru Şldovan; cop. Vitalle Coroban.
- Ch. : Cartier, 2008 (Combinatul Pollgr.). – 140 pag. – (Col. „Verde”).
Tlt. orlg. : Les mathématiques expliquées à mes filles

ISBN 978-9975-79-485-5

ŒU 087.5:51
G 93

— *Ce înseamnă a explica?* întrebă Lola.

— Mă iei tare! *Plicare,* „a plia” în latină, *explicare,* „a deplia”, dar mai înseamnă şi complex şi perplex. Când rămâi perplex în faţa unui lucru complex, cauţi o explicaţie. Iar explicaţia, prin deplierea a ceea ce este pliat şi încâlcit, va face acel lucru mai clar. Aceeaşi rădăcină precum *ple- xus,* da, nodul pe care îl ai acolo, în coşul pieptului, şi care te doare atât de tare când eşti stresată. A explica înseamnă a desface nodul. După explicaţie, totul devine mai clar în minte, iată de ce se spune că o explicaţie „luminează”. Este precum suflarea vântului ce alungă norii.

Ray aşteptă ca vântul să fi alungat norii.

— Lola, ce este matematica pentru tine?

Lola nu aşteptă mult până a răspunde:

— Este o materie plină de PROBLEME, ghiftuită de NECUNOSCUTE, în care suntem constrânşi de REGULI. O materie în care profesorul este cel care pune problemele, iar eu sunt cea care trebuie să le rezolve!

Ray izbucni în râs.

Precum mulţi dintre colegii ei, Lola era ZERO LA MATEMATICĂ. Sau, în fine, cel puţin asta susţinea ea, cu obrăznicie făţişă. în această proclamaţie, rostită sus şi tare, nu puteai să nu ghiceşti însă un fel de cochetărie, nulitatea în domeniul matematicii fiind la modă la unii elevi. Oare Lola chiar era mândră de aceasta sau era doar un mod de a revendica un handicap de care nu credea că s-ar putea descotorosi vreodată?

Ray şi Lola conveniseră ca, pentru început, fiecare să spună ce-i place şi ce detestă în matematică.

Lola începu, şi începu cu convingere:

— Ca să fiu sinceră, mi-e greu să găsesc ceva care să îmi placă... dar nu dezarmez. Să spun pe rând ceea ce nu-mi

place?

— Pe rând.

începu rafala:

— în primul rînd, nu ştiu despre ce este vorba în matematică. Apoi, nu ştiu de unde să încep spre a rezolva o problemă, apoi nu am înţeles niciodată ce este o – silabisi – DE-MON-STRA-ŢI-E. Mă opresc sau merg mai departe?

— Mergi mai departe.

— Nu înţeleg la ce folosesc toate astea, vreau să spun, la ce folosesc în viaţa de zi cu zi.

în fine, spuse ceea ce îi stătea cel mai tare pe suflet:

— Matematicile sunt violente!

Ray o privi, siderat. Matematica, violentă! Doar Lola putea profera o asemenea acuzaţie, îşi reveni, şi cu un surâs discret:

— Păi, dacă simţi o notă de violenţă în matematică, înseamnă că nu rămâi indiferentă!

Lola, destabilizată, spuse în cele din

urmă:

— *Dar închisoarea îl lasă indiferent pe prizonier?*

— Matematica, o închisoare!!!

— *Era doar o analogie, pur şi simplu ca să contrez argumentul tău şi să-ţi arăt că el nu demonstrează nimic. Cum ai vrea ca o materie asupra căreia sunt constrânsă să mă aplec timp de mai multe ore pe săptămână să mă lase indiferentă!*

— Mi-ai putea spune prin ce este violentă matematica?

— *Mi separe brutală, rezultatele pică precum lama ghilotinei. Greşeşti o nimica toată şi se duce totul de râpă, totul devine fals, complet fals, nu doar... puţin fals.*

Ray izbucni din nou în râs.

— *Şi apoi,* continuă Lola cu tirul ei, *ai acea senzaţie că este aşa şi nicidecum altfel, ceea ce mă agresează. Mă simt neputincioasă. E ceva care îţi închide gura. Iar mie nu-mi place să mi se închidă gura. Matematica este... este fără replică.*

— Dar ce replică ai vrea să dai?

— *Niciuna, tocmai.*

Ea remarcă zâmbetul ce apărea pe buzele lui Ray.

— *Oh, nu te bucura prea repede. Dacă nu am nimic de replicat, este doar pentru că nu mă interesează într-atât, încât să am ceva de spus. Am ceva de spus doar despre ceea ce mă interesează!*

— Chiar eşti sigură că numai în matematică lucrurile sunt „într-un fel şi nicidecum altfel”?

Sena traversează Parisul şi nu Strasbourgul, aşa stau lucrurile şi nicidecum altfel. Bastilia a fost cucerită pe 14 iulie 1789, nu pe 13. Aşa s-a întâmplat, nu altfel.

— *Da, dar s-ar fi putut.*

— Ce s-ar fi putut?

— *Să fie cucerită pe 13.*

Spulberat de replica Lolei, Ray înţelese că schimbul de replici – confruntarea? – nu avea să fîe uşoară.

— De acord, admise el până la urmă. Profesorul tău de istorie ce face? Explică de ce Bastilia a căzut pe 14 iulie, dă

motive, expune faptele, arată de ce evenimentul a avut loc la acea dată. La fel şi la geografie, legat de cursul Senei. Lucrurile ar fi putut fi altfel, desigur, dar, dacă sunt astfel, există motive pentru aceasta. Deseori, de aceea se explică, se prezintă motivele.

— în matematică, tocmai am impresia că lucrurile nu ar fi putut fi altfel. Ele sunt aşa cum sunt, iar acest lucru este violent. Un triunghi isos- cel nu poate să nu aibă două unghiuri egale! Piesa s-a jucat înainte de sosirea ta. Şi te întrebi, atunci ce mai caut eu în scenă?

— Dar şi cursul Senei „s-a jucat” înainte de venirea ta.

— E adevărat, dar îl resimt altfel.

— De ce crezi una ca asta?

— Chiar cred asta pentru că, la matematică, nu înţeleg despre ce este vorba. La istorie, la geografie, la franceză, la chimie, la fizică înţeleg. Chiar dacă nu mă prind mereu, am o vagă idee despre ceea ce se discută. Matematica,în schimb, este ca un limbaj secret.

— Ah, strigă Ray. Dacă este un limbaj secret, se referă la ceva, nu la nimic, de

acord?

— *Eh, tot acolo ajungem, deoarece, în ambele cazuri, nu ştiu despre ce este vorba.*

— Nu. Nu ajungem tot acolo, deoarece, dacă este un limbaj, secret sau nu, acesta vorbeşte despre ceva. Deci ai putea încerca să-l decriptezi. Eşti de acord măcar cu faptul că matematica nu poate să nu se refere la nimic?

— *Prezentată sub această formă, sunt obligată să recunosc faptul că, da, matematica se referă cu siguranţă la ceva. Dar la ce?*

— Ei bine, te anunţ că, atunci când deschizi un curs de matematică, începi de fapt un curs de limbă. Nu chiar precum cursul tău de chineză, dar, cu siguranţă, un curs de limbă.

— *În franceză, în chineză, există oameni, texte, persoane care comunică spre a exprima idei, sentimente, informaţii, chiar şi declaraţii de dragoste.*

Cuprinsă de o idee spontană:

—în matematică se poate spune „Te iubesc”? Luat prin surprindere, Ray

ezită, dar fu constrâns să admită că, în matematică, nu se poate spune „te iubesc”.

— Nu am afirmat că s-ar putea spune orice, dar se pot exprima multe idei: a fi între, a fi de o parte şi de alta, a fi cel mai mare, cel mai mic, a fi aproape, a determina, a acoperi, a se întâlni...

Cu încrederea recăpătată, declară:

— Matematica este un limbaj, dar nu doar atât, desigur. Un limbaj ce permite exprimarea de gânduri, enunţarea de idei, stabilirea unor propoziţii, punerea unor probleme, afirmări, respingeri, descrieri. Şi nu este un limbaj secret, deoarece regulile de scriere care îl guvernează sunt publice, oricine şi le poate însuşi. Ba chiar mai mult, elevii nu doar că pot, ci TREBUIE să şi le însuşească, ele constituie o parte esenţială a materiei.

— *în ce ţară voi putea învăţa acest limbaj? Arată-mi-o pe o hartă, spre a mă putea înscrie la un curs de perfecţionare lingvistic.*

— Domnişoara mă persiflează. Acest

limbaj îl înveţi la cursul de matematică.

>

— *Poate ar trebui să fac şi traduceri şi versiuni în matematică...*

— Categoric. Traducerea unui text matematic în limbaj curent este un exerciţiu excelent. Să facem un inventar al cuvintelor şi al semnelor pe care le întâlnim în matematică.

Ray scrise ceva scurt pe o foaie pe care i-o întinse Lolei.

— Iată trei expresii. Dacă folosim sintagma de *expresie matematică,* aceasta este deoarece scrierea exprimă ceva, o idee, un fapt. Fie deci trei expresii care se aseamănă, şi care totuşi sunt de natură complet diferită:

„2+ =„, „2 = 1+3”, „2 = 1+1”

„2+ =„, această expresie nu vrea să spună nimic. Nu este falsă, putem chiar afirma că nu este nici măcar falsă. Pentru a fi astfel, este nevoie ca ea să aibă un sens. Or ea nu are sens. Este *prost construită,* deoarece nu este scrisă conform regulilor de scriere.

„2 = 1+3”, înţeleg ceea ce vrea să

spună: numărul 2 şi numărul 1+3 sunt egale. înţeleg. Dar este fals.

„2 = 1+1”, înţeleg ceea ce vrea să spună: numărul 2 şi numărul 1+1 sunt egale. înţeleg şi este adevărat.

Cea mai mare parte dintre erorile de matematică provin din faptul că propoziţiile pe care le scriem nu au sens. Prima precauţie deci este aceea de a ne asigura că ele sunt scrise conform regulilor de scriere.

Ray detaşă încă o foaie, scrise pe ea şi i-o întinse Lolei.

— „D+D' = 2”, „2//3”. Iată două propoziţii prost construite. Ah, uitasem: D şi D' sunt drepte.

,,D+D' = 2”, deoarece nu ştim ce înseamnă „suma a două drepte”, semnul + neexistând în geometrie.

„2//3”, deoarece nu ştim ce înseamnă „două numere paralele”, semnul // neexistând în aritmetică. Să facem un inventar al părţilor de vorbire folosite în limbajul matematic. Cuvinte din limbajul curent: articole: *un, o, nişte;* prepoziţii: *în;* conjuncţii: *şi, precum, care;* verbe, unele

exprimând o cerinţă: *construiţi, găsiţi, determinaţi, verificaţi, trasaţi...,* altele care prezintă obiecte: *se consideră, se dă;* cuvinte specifice matematicii, cel mai frecvent nume de obiecte, *mediană, mediatoare, diagonală, funcţie, cilindru, sinus, cosinus* etc.; dar şi adjective: *isoscel, echilateral, paralel, par...*

Simboluri specifice limbajului matematic, care permit scrierea operaţiilor într-o manieră simplificată, +, x,..., relaţii, =, //,...

Să trecem la propoziţii: ce tip de propoziţii întâlnim în matematică? Enunţuri, prezentări de obiecte sau situaţii şi care formulează cerinţe. Atunci când un obiect nou apare în universul matematic, trebuie să-i completăm certificatul de naştere, acesta este rolul *definiţiei,* care semnează intrarea sa oficială în universul matematic. în definiţie, figurează numele şi informaţiile care permit caracterizarea obiectului. Definiţiile încep invariabil cu...

Lola îl întrerupse:

—Profesorul îşi schimbă tonul şi, cu o

voce pompoasă, declamă: „Definiţie. Numim chestie…”

— Este normal, definiţia reprezintă un act fundamental. Este un moment important în istoria matematicii. Spre deosebire de definirea cuvintelor din franceză, definiţiile matematice nu sunt totalmente descriptive, sunt direct operatorii cu alte cuvinte, nu se poate face matematică decât dacă se cunosc cu exactitate definiţiile, punând la treabă fiecare cuvânt al acestora. Iată de ce fiecare definiţie trebuie reţinută extrem de corect. Un singur cuvânt uitat şi…

— *… e complet fals, nu doar… puţin fals… Asta e ceea ce nu pot eu suporta.*

— Totuşi este unul dintre lucrurile cele mai importante pe care le poate aduce matematica, precizia, este una din calităţile matematice care chiar pot să-ţi folosească „în viaţa de zi cu zi”, precum spui tu. A fi precis nu înseamnă a fi maniac. Atunci când matematicienii descoperă idei noi, concepte noi, obiecte noi, se întâmplă deseori ca ei să le dea un nume spre a putea vorbi despre ele şi spre a le utiliza, fără a le da, totodată, şi o

definiţie riguroasă. De exemplu, dreapta, cercul etc. au „funcţionat” cu mult timp înainte ca Euclid să le dea o definiţie. La fel şi astăzi.

— *De ce petrecem timpul scriind egal?*

— îţi poţi imagina matematica fără semnul egal? Este semnul cel mai important din matematică. Când scriu 2 = 1+1, ce spun? Spun că numerele 2 şi (1+1) sunt ACELAŞI număr, că sunt două forme diferite ale aceluiaşi număr, iată de ce le egalez. Ba mai mult, egalez toate formele posibile ale lui 2:

(l+l) = (5-3) = (^) = (2xl)=...

— *Cu ce te ajută asta?*

— Dacă, dintr-un motiv sau altul, am nevoie ca 2 să se prezinte sub forma unei sume, îl prezint ca (1+1). Dacă am chef ca el să apară precum o diferenţă, îl prezint ca (5-3) etc. Astfel, în funcţie de nevoi, folosesc una dintre nenumăratele sale identităţi.

Când scriu *a=b,* anunţ faptul că *a* şi *b* sunt interschimbabile, acolo unde se găseşte a, îl pot înlocui cu *b.* Şi invers.

Contrariul lui egal este *diferit.* Se

notează cu un egal barat,« * ». Diferit înseamnă „care nu sunt identice” şi numai aceasta. De aceea, nu trebuie sub nicio formă să-l confundăm cu mai mic sau mai mare, « < » sau « > ».

— Egalul a existat dintotdeauna?

— Ideea de egalitate, da, dar nu şi semnul. în 1557, un medic englez, Robert Recorde, a avut ideea de a trasa micul semn pe care îl cunoşti: =. Atunci când a fost întrebat care au fost motivele alegerii sale, el a răspuns: „Am ales o pereche de paralele sau de drepte gemene, deoarece nimic nu este mai asemănător decât doi gemeni”.

— Şi înainte cum se proceda?

— Se scria egal folosind literele, *aequali,* în latină. Toate cuvintele matematicii se scriau cu litere, nu exista niciun simbol. O scriitură literală, infinit mai complicată, mai lungă şi foarte puţin practică.

— Pe vremea aceea, textele matematice semănau deci cu celelalte texte?

— Absolut.

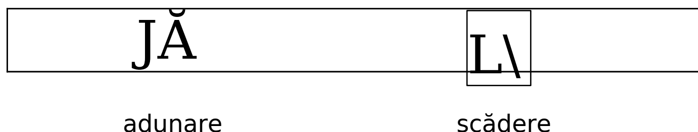
— Si + si – ?

— Este o poveste cu cufere.

— *Cu cufere?*

— Prin anul 1500, în Germania, unele mărfuri erau vândute în cufere de lemn. Pline, acestea trebuiau să cântărească 4 *centner* (cam 50 kg). Dacă una dintre ele avea un deficit de greutate, de exemplu 5 livre, se scria pe cufăr 4c-51. Dacă prezenta un exces de greutate, de exemplu de 3 livre, se bara linia şi se scria pe cufăr 4c+31. Semnele au trecut de pe cuierele de lemn pe foile de hârtie şi din comerţ în algebră.

Egiptenii foloseau două hieroglife:



Pe aceste desene, putem vedea:

A aduna: cele două picioare merg în sensul scrisului.

A scădea: cele două picioare merg în sens invers scrisului.

— *Plus este un minus barat, diferit este un egal barat.*

— Bună observaţie. în matematică, există o mulţime de feluri de a spune „diferit”, precizând prin ce anume diferă două elemente. Când este vorba de numere, se face *diferenţa, (a-b).* Dacă aceasta nu este nulă, cele două numere sigur nu sunt identice. Există încă o

raportul —. Dacă Ţ * 1, numerele sunt

modalitate la care nu ne gândim îndeajuns: raportul.

Facem diferite.

— *Şi celelalte semne? X-ul de la înmulţire?*

— Un englez, Oughtred, este cel care l-a inventat pe la 1600.

— *Şi mai mare şi mai mic?*

— Un alt englez, Thomas Harriot, cu ceva timp mai înainte.

— *De ce unul este deschis spre dreapta şi celălalt spre stânga?*

— Habar nu am. Ba da, ba da, reveni, cred că este deschis în direcţia numărului mai mare.

— *Si radicalii?*

— Un german este cel care a inventat semnul. Se spune că este o transformare a lui R de la *radix,* „rădăcină” în latină.

2

— Da, dar de ce rădăcină?

— Ce este >/2 ? Este numărul al cărui pătrat este 2: $(V2)^2$. Spunem, de asemenea, că „ridicăm” la pătrat. Astfel, ridicând ^2 la pătrat, obţinem 2. Avem în minte imaginea *rădăcinii* unei plante îngropate în pământ, care, atunci când se ridică, generează planta.

— Drăguţă explicaţie. O întrebare pe care mi- am pus-o deseori: au existat dintotdeauna numere?

Punct ochit:

— Au existat dintotdeauna numere?

Numerele

— Numerele au fost inventate încă din zorii umanităţii spre a răspunde la întrebarea „Cât?”. Câţi copii sunt în trib? Câte oi sunt în stână? Câte stele sunt pe cer? Câte zile mai sunt până revine luna plină? Numerele sunt una dintre cele mai mari invenţii ale umanităţii; graţie lor, putem număra, măsura, calcula.

în acelaşi fel în care oamenii au învăţat să conserve focul, au învătat să conserve si numere- le. Pentru a-şi aminti o cantitate, îi păstrau urma prim marcaje pe oase, pe pietre, după cum şi prin folosirea de obiecte, de pietricele, *calculus,* scoici, noduri pe frânghii. Apoi, au început să noteze semne pe suporturi precum argila, lemnul sau papirusul. Astfel a luat naştere scrisul.

După ce au reprezentat numerele,

oamenii au început să calculeze, să efectueze operaţii, la

început adunarea, apoi înmulţirea. Adunau, clasau, enumerau, ordonau.

Ray întinse mâna şi deschise palma.

— Mâna a fost prima maşină de calcul din istorie, de care oamenii s-au folosit timp de mii de ani.

Primele numere au fost cele *naturale,* care permiteau numărarea şi calculul. Apoi, *fracţiile.* Apoi, zeroul, apoi, numerele negative, citez în ordinea în care au apărut în istorie.

— *Cifre, numere, mereu le încurc.*

— Tu spui „o cifră de trei numere” sau „un număr de trei cifre”?

— *Un număr de trei cifre! Ce ingenios,* admise Lola.

— Numerele sunt compuse din cifre, precum cuvintele sunt compuse din litere!

— *Cifrele sunt alfabetul numerelor, asta vrei să mă fac să spun.*

— într-adevăr. Iar numeraţia noastră este zecimală.

— *Deoarece folosim 10 cifre. Dar cifrele sunt şi numere. 1,2,3...*

— Corect.

— *Si invers nu.*

— Corect. 10, de exemplu...

— *...nu este o cifră.*

— Este cel mai mic număr care nu este o cifră. 5 este o dată cifră în 555 şi număr în „5 degete”. în calitate de cifră, este un semn de scriere. Ca număr, exprimă o cantitate. Contrar a ceea ce credem deseori, cifrele au fost inventate după, mult după numere. în timp ce numerele foloseau la rostirea cantităţilor, cifrele foloseau la scrierea numerelor.

Problema care survine la numere este că sunt foarte multe. Aceasta este chiar marea lor calitate şi, dacă există ceva ce nu ne-am dori să ne lipsească, acestea sunt numerele.

— *Dat fiind că există o infinitate de numere, cum le putem denumi pe toate?*

— Toată lumea intuieşte că şirul numerelor naturale nu se opreşte, că se poate merge mereu mai departe. Nu există un „cel mai mare număr natural”. Dacă ar exista unul, să zicem A, A fiind natural, şi A+l ar fi unul la fel. Or A+l este mai mare decât A, ceea ce contrazice faptul că A este cel mai mare. Acest tip de demonstraţie este o *demonstraţie prin*

reducere la absurd. Nu există deci un număr natural care să fie cel mai mare, ceea ce implică faptul că sunt o cantitate infinită. Toate civilizaţiile s-au confruntat cu întrebarea pe care ai pus-o tu. Să presupunem că atribuim numele fără vreun criteriu, la nimereală. Curând, am ajunge să nu mai ştim ce nume denumeşte fiecare număr. Ar fi o dezordine totală. De aceea, au fost concepute procedee sistematice pentru atribuirea numelor, în aşa fel încât să ofere informaţii despre numerele pe care le denumesc. De unde să se înceapă? în primul rând, alegerea cifrelor, cu alte cuvinte, a unor numere „alese", având ca scop reprezentarea celorlalte numere. Apoi, elaborarea unor moduri de combinare a acestor cifre pentru a scrie numerele. Este ceea ce numim o *numeraţie.* Unele dintre ele sunt ingenioase, altele greoaie, puţin eficace. Romanii erau reputaţi ca fiind slabi la acest capitol: erau nevoiţi să creeze noi cifre cu atât mai mult cu cât numerele pe care voiau să le reprezinte erau mai mari! X (10), L (50), C (100), D (500), M (1000)

şi altele, şi altele. Trebuiau să creeze cifre fără încetare. îti dai seama că siste-

J

mul devine impracticabil dacă sunt zeci şi zeci de cifre. Pentru a funcţiona, este nevoie ca numărul de cifre să fie fixat odată pentru toate numerele şi ca acest număr să fie redus.

Grecii, evreii foloseau numeraţii care nu erau geniale, în timp ce mesopotamienii şi mayaşii dispuneau de o numeraţie foarte eficace. Cei din urmă foloseau o numeraţie în baza 20, iar primii nu foloseau decât două cifre, 1 şi 60.

— Precum în binar.

— Nu. în binar se foloseşte obligatoriu 0. Nu există decât două cifre, 0 şi 1.

— Tot nu mi-ai răspuns la întrebare.

— îţi răspund: singurul sistem capabil să denumească toate numerele, oricât ar fi de mari, este cel pe care îl folosim astăzi şi pe care îl foloseşte toată lumea, *numeraţia de poziţie cu un zero.* Un grup de cifre fixate *a priori* şi un principiu, principiul de poziţie care statuează următorul lucru: valoarea unei cifre, exceptând valoarea sa particulară,

depinde de poziţia pe care o ocupă în scrierea numărului. în 1717, primul 1 valorează o mie, al doilea zece, primul 7 valorează şapte sute, al doilea valorează şapte. Valoarea ce depinde de poziţie este o idee cu adevărat genială.

— *Valoarea se schimbă în funcţie de locul unde te situezi. Nu cumva este ca şi în viaţă?*

— Da, ai dreptate. Deseori, valoarea care ni se conferă depinde de locul pe care îl ocupăm în societate, ceea ce e, deseori, foarte nedrept. Dar, pentru numeraţii, această metodă este cea mai bună care poate fi închipuită, realizează visul tuturor civilizaţiilor: cu o mână de cifre, câte degete avem la două mâini, putem denumi TOATE NUMERELE DIN LUME! Oricare ar fi numărul prezentat, i se atribuie un nume şi acesta este unic. Fără nicio ambiguitate. Şi, în plus, mărimea unui număr este vizibilă în numele său: cu cât numele este mai lung, cu atât numărul este mai mare. Nu există metodă mai bună!

— *De când există 0?*

— Prin secolul al V-lea înaintea erei

noastre, babilonienii au inventat un semn spre a marca locul neocupat. Când vrem să exprimăm numărul o sută într-o numeraţie de poziţie, să zicem în cea zecimală, îl descompunem în unităţi, zeci, sute... Deci, pentru o sută unu: 1 sută, 1 unitate, scriu 11. Dar 11 este zece şi o unitate, deci unsprezece. De unde provine confuzia? De la faptul că nu am tinut cont de absenta zecilor.

— *A ţine cont de absenţă!*

— Ar trebui spus o sută unu, este 1 sută, nici un zece, 1 unitate. Dar cum să se marcheze absenţa zecilor? Printr-un nou semn, 0, care înseamnă „loc neocupat”. Acest semn, ce permite scrierea numerelor, este deci o cifră, care se adaugă celorlalte nouă. Atunci, o sută unu se va exprima fără vreo ambiguitate, 101.

Există şi o a doua semnificaţie a lui 0. Când scădem o cantitate din ea însăşi, de exemplu 5-5. Cum să semnalez că nu rămâne nimic, luând 5 din 5?

în acest caz nu mai este vorba de scriere, cum era în situaţia indicării unui loc neocupat, ci de a marca o cantitate,

cantitatea nulă. 0 este, în acest caz, un număr. Loc neocupat, cantitate nulă, iată cele două chipuri ale lui zero.

— *Mereu am impresia că se frizează catastrofa când se foloseşte 0. De parcă ar urma să ne explodeze în faţă.*

— De exemplu?

— *Putem împărţi cu orice, dar niciodată cu 0.*

— Există motive pentru aceasta sau este o decizie arbitrară a profesorului tău?

— *Să zicem că ar fi motive.*

— Pe care ai vrea să le cunoşti?

— *Pe care mor de nerăbdare să le cunosc.*

— La înmulţire, 0 domină orice alt număr: 0xn=0xm=0. S-a putut spune că este un element *anihilant (n.r. – nul).* Pe de altă parte, la adunare, nu are niciun efect: *n+Q=n,* 0 este *element neutru* la adunare.

Şi împărţirea cu 0? Să presupunem că am putea împărţi cu 0, hai să analizăm consecinţele unei asemenea ipoteze. Fie *a* un număr oarecare, insist, oarecare, pe care îl împărţim la zero. Operaţia fiind

permisă, rezultatul este un număr, să zicem *b.* Avem deci *= b* Produsul me- zilor fiind egal cu produsul extremilor, îţi aduci aminte, desigur: a=0xb. Or, 0xb=0, deci a=0, *a* fiind un număr oarecare. Ce am demonstrat? Că, dacă ar fi autorizată împărţirea la 0, toate numerele ar fi nule!

— Ar fi jenant, admise Lola. Nu ar exista decât un număr, şi acesta ar fi zero! Cu toate că ar fi un avantaj, cel puţin: toată lumea ar avea aceeaşi notă! Şi am fi cu toţii nuli la matematică.

— Nu cumva se numeşte aproximare inferioară aceasta? Presupun că nu apreciezi interdicţiile. Interdicţia absolută în aritmetică este împărţirea cu 0. Aceasta atrage după sine nişte pre- *p* cauţii. Confruntat cu un raport — , din reflex, trebuie să ne grăbim să scriem «Q^O», pentru a preîntâmpina „catastrofele” care n-ar întârzia să apară dacă Q ar fi nul.

— Şi sistemul binar prin ce este atât de diferit de cel zecimal?

— Dimpotrivă, sunt asemănătoare. Ambele sunt numeraţii de poziţie cu un zero, singura diferenţă fiind numărul de

cifre, zece pentru sistemul zecimal, două pentru cel binar.

Avantajul sistemului binar: foloseşte puţine cifre; inconvenient: scrierile numerelor sunt mult mai lungi. Numărul zecimal 99 se scrie 1100011 în binar. Diferenţa de lungime dintre cele două scrieri este evidentă.

— *De ce este atât de important sistemul binar?*

— în secolul al XVII-lea, marele matematician şi filosof Leibniz s-a mobilizat pentru a-l face să fie adoptat de către colegii săi, dar nu a mers, iar binarul a fost uitat. Până la apariţia calculatoarelor; atunci a fost imediat perceput ca limbajul cel mai bine adaptat la comunicarea cu maşinile. Limbajul nostru scris este compus din cuvinte şi numere, douăzeci şi şase de litere şi zece cifre, deci treizeci şi şase de semne, la care se adaugă spaţiul şi semnele de punctuaţie. Pentru a comunica cu o maşină, informaţia va fi transmisă printr-un curent electric. Or curentul admite doar două stări; curentul trece sau nu trece. S-a ales utilizarea cifrelor 1 şi 0.

Trecerea curentului: 1, oprire: 0. Apoi, s-au codificat cele 36 de semne prin şiruri de 1 şi 0. Iată unde intervine sistemul binar.

Ray căută prin hârtiile sale, dintre care scoase o foaie mototolită şi începu să citească:

— A se scrie 01000001. B, 01000010, ... până la Z. Iată de ce sistemul binar, cu cele două cifre ale sale, este suficient spre a traduce orice propoziţie din orice limbă, conţinând cuvinte şi numere. Informaţia este transportată pe o cale electronică, extrem de rapidă.

Când apeşi pe tasta A de la calculatorul tău, determini impulsuri electrice de intensităţi diferite, cele slabe corespund lui 0, cele puternice lui 1.

Deci, pentru litera A, 01000001, unul slab, unul puternic, cinci slabe, unul puternic. Această suită de impulsuri va permite selecţia – dintr-un catalog stocat în memoria calculatorului – a unei alte secvenţe de 0 şi 1, care corespunde punctelor aprinse sau stinse de pe ecran, care vor desena în final litera A. Astfel, sistemul binar constituie limbajul

calculatoarelor şi permite reprezentarea sunetelor, textelor, imaginilor, ce vor fi inscripţionate pe CD, DVD etc. Astfel, se intră în lumea „numericului”, în care informaţiile sunt transmise prin procedee ce utilizează numere.

Să continuăm inventarul numerelor. După numerele naturale, fracţiile, din latinescul *frac- tus,* „fragmentat”. O fracţie este un „număr fragmentat”.

— *Fiindcă nu este „întreg”?*

— Exact. O fracţie este compusă din două 7 numere întregi şi o *linie.* De exemplu, —. Sub linie, „cel ce numeşte”, *numitorul,* în acest caz este vorba despre cincimi, a cincea parte din unitate. Deasupra, *numărătorul,* „cel ce numără”: aici, 7. Fracţia ne spune că sunt şapte cincimi.

Una dintre proprietăţile pe care le întâlnim de cum abordăm fracţiile este o consecinţă imedia-

> >

tă a egalităţii a două fracţii. Dacă — = —, atunci *ba*

axd=hxc. O egalitate între două fracţii produce o egalitate între două numere întregi, rezumată prin celebra formulă:

produsul mezilor este egal cu produsul extremilor. Este cunoscută şi sub numele de „produs în cruce”.

— *La numerele naturale, adunarea este simplă, iar înmulţirea complicată. în cazul fracţiilor, este exact invers. De ce?*

— Aducere la acelaşi numitor! Numitorul fiind cel care denumeşte, trebuie ca fracţiile să denumească acelaşi lucru, altfel nu le putem adu- na fără precauţii. Am vrea noi ca să fie suma numărătorilor supra suma numitorilor, 12+19 r . , . .
„——y, ne-ar face viaţa mult mai uşoara. Dar, din păcate, este fals! Deoarece, urmând principiul „nu adunăm mere cu pere”, nu are niciun sens să adunăm şeptimi cu unsprezecimi. Ce adunăm atunci? Şeptimi cu şeptimi, unsprezecimi cu unsprezecimi. Altfel spus, fracţii cu acelaşi numitor. Cum facem ca fracţii care nu au acelaşi numitor să aibă totuşi un numitor comun? Prin aducerea la acelaşi numitor 7x11, abia atunci putem aduna numărătorii.

$$\frac{12x11}{7x11}+\frac{19x7}{7x11}=\frac{132}{77}+\frac{133}{77}=\frac{265}{77}$$

Şi înmulţirea? Merge de la sine, se înmulţesc numărătorii, se înmulţesc

numitorii.

12 19   12x19
7 XU   7x11

Ca să-ţi aduci aminte, jumătatea jumătăţii este ~x~, este T = produsul numărătorilor

22 4 2x2 r

supra produsul numitorilor. Ai dreptate când afirmi că adunarea fracţiilor este mai complicată decât înmulţirea.

»

— *între două fracţii, nu este uşor de ştiut care este mai mare.*

— în cazul a două numere naturale, se poate vedea din prima care este cel mai mare. Nu

este cazul şi pentru fracţii. Este greu de spus care . ’ A 12 ’ 19 j .

este mai mare intre — şi — de exemplu.

Trebuie ' 12x11

făcut un calcul, o aducere la acelaşi numitor:---

• 19x7 XT . - A 4 \ . 7x U .

şi . Nu ne mai ramane decât sa comparam numărătorii, 132 pentru prima, 133 pentru cea de-a doua. || este mai mare decât £ categoric nu era o concluzie observabilă *a priori.*

Una dintre primele decizii pe care le-au luat matematicienii greci a fost aceea de a tria numerele naturale, prin separarea în două grupuri: cele care sunt divizibile cu 2, duble, *pare-,* cele care nu sunt, cele „ne-pare”, *impare.* La prima vedere, nu pare a însemna mare lucru, dar această simplă distincţie pe care nu o efectuase nimeni înaintea lor le-a permis să „facă matematică”: să stabilească rezultate generale referitoare la familii infinite de obiecte. Dispunând de aceste familii de numere, P, cele pare, şi I, cele impare, au pornit în căutarea de rezultate aplicabile nu doar la câteva numere, ci la TOATE cele pare, TOATE cele impare. Iată una dintre întrebările pe care şi le-au pus: cum se comportă paritatea în principalele operaţii? Se păstrează? Dacă adun două numere pare, suma este tot un număr par? Adunarea conservă paritatea?

Să luăm un exemplu. 2+4=6, suma este pară. Dar aceasta nu constituie o dovadă, deoarece nimic nu ne asigură că, la alegerea altor două numere pare, suma va fi din nou un număr par. Pentru a putea trage o concluzie, nu puteau alege

altă cale decât construirea unei demonstraţii. Mi-ai spus că nu ai înţeles niciodată ce e o de- mon-stra-ţi-e. Hai să nu fim scârţari! Să construim una nouă!

Pentru început, pornind de la definiţie, trebuie elaborată o formulă generală a ceea ce este un număr par. Un număr par este ceva dublu, deci egal cu „de două ori un alt număr natural”, pe care îl notez 2n, *n* fiind un număr natural oarecare. Această formulare permite generarea tuturor numerelor pare şi numai a acestora, dând toate valorile posibile lui *n.* Iată o scriere operativă, care ne permite să avansăm în demonstraţie. Suma a două numere pare: *2n+2n'.* Scriu *n* şi *n',* deoarece, dacă aş folosi acelaşi *n,* ar însemna că cele două numere trebuie să fie egale, iar generalitatea proprietăţii pe care vreau să o stabilesc ar fi sacrificată. *2n+2n’>* în acest stadiu nu pot trage nicio concluzie. Trebuie să transform această scriere într-una care să-mi „vorbească”: „de două ori un număr”. Scoaterea factorului: *2n+2n'=2(n+n').* *n* şi *n'* fiind două numere naturale, suma lor este un număr natural *n”,* care corespunde formei

unui număr par. Tocmai am demonstrat că suma a două numere pare este un număr par.

Iar cele impare? Trebuie să elaborez o metodă de a le scrie, asemănătoare cu cea pe care am elaborat-o pentru cele pare. De exemplu, obţin un număr impar adăugând 1 la unul par, deci (2n+l). Să-i dăm înainte cu demonstraţia!

(2H+1)+(2M'+1) = 2«+2M+2 == 2(n+n+l), dar dacă M şi «'sunt numere naturale, atunci şi *n+n'+l* este număr natural. Să reluăm seria de egalităţi, (2n+l)+(2n +1) = 2M+2H+2 = 2(n+n+l) = 2n , deci un număr par. Pot anunţa că suma a două numere impare este un număr par. Paritatea nu se conservă. Dar rezultatul nu este mai puţin folositor, a şti că suma a două numere impare este (mereu) pară constituie un rezultat la fel de util ca şi cum ar fi fost egală cu un număr impar. Pe de altă parte, dacă nu s-ar fi putut afirma nimic *în general* despre suma a două numere impare, abia atunci am fi fost într-o situaţie mai puţin interesantă.

Să vedem ce se întâmplă la înmulţire.

Să înmulţim două numere pare *2nx2n'=4nxn'.* Pentru a transforma această scriere într-una care să „îmi vorbească”, trebuie să fac să apară 2 ca factor al unei expresii. Să încercăm: *4nxn'=2(2nxn’)=2n”*$_{y}$ deci un număr par.

Pentru cele impare: (2»+l) x (2м'+1) = *4nn'+ 2n+2n'+l = 2(2nxn'+n+n')+l = 2n”+l*$_{y}$ adică un număr impar. Par ori par = par, impar ori impar = impar. Din aceasta, trag concluzia că înmulţirea păstrează paritatea. Asta înseamnă a face matematică: a stabili rezultate privitoare la familii de obiecte definite prin proprietăţi generale.

— De ce înmulţim atunci când am putea face adunări în locul lor?

— înmulţim tocmai pentru a nu face adunări.

Scriu: 2+2+2+2+2 (9 semne), în timp ce folosind înmulţirea: 5x2 (3 semne). „Câştig” şase semne.

— Dar puterile? Când au apărut?

— După cum înmulţirea este o suită de adunări, ridicarea la o putere este o suită de înmulţiri. Scriu 5x5x5 (5 semne), iar folosind puterile scriu 5^3 (2 semne). Am

câştigat 3 semne.

în operaţiile cu numere, sunt trei nivele, adunare, înmulţire, putere. O înmulţire este o suită de adunări, o putere este o suită de înmulţiri. Teoretic deci am putea face toate calculele doar cu adunări. De exemplu, 5^3=5x5x5=(5+5+5+5+5)+(5+5+5+5 49 de semne, fără a pune la socoteală parantezele!! De altfel, acesta este modul de operare al calculatoarelor, prin adunări repetate: multe, multe adunări, dar fiecare efectuată intr-un timp infim.

— *Există vreo legătură între pătrat şi ridicarea la pătrat?*

— Matematicienii greci au ţesut strânse legături între numere şi formele geometrice. Pentru ei, pătratul, figura, de latură 5, având ca suprafaţă 5x5, era legat de numărul „pătratul lui 5”, 5 *la pătrat.* 5^2. în mod asemănător, pentru cubul de latură 5, al cărui volum este numărul „cubul lui 5”, 5 la cub, 5^3.

în acelaşi fel în care s-au stabilit reguli de calcul pentru fracţii au fost stabilite reguli de calcul pentru puteri. Aceste reguli nu sunt arbitrare, ele se trag direct

din definiţia unei puteri.

Şi de astă dată înmulţirea este mai simplă decât adunarea.

$2^3+2^5=$ fără simplificare. Şi, mai ales, nu dă 2^{3+5}!

Pe de altă parte, $2^3x2^5=(2x2x2)x(2x2x2x2\ \ x2)$. Elimin parantezele, am acest drept, este o proprietate a înmulţirii numerelor naturale: $2^3x\ 2^5=2x2x2x2x2x2x2x2=2^8=2^{3+5}$.

Această regulă este capitală, este cea mai importantă referitoare la puteri. Să o examinăm. La stânga, un produs de puteri, la dreapta, suma ex- ponenţilor: $a^n x a^m = a^{n+m}$.

Această trecere de la sumă la produs şi invers este caracteristică puterilor. Aceasta conferă puterilor o mare parte din interes: dacă vreau să multiplic două puteri ale aceluiaşi număr, nu am decât să adun exponenţii lor, cu alte cuvinte, în-locuiesc o înmulţire cu o adunare!

— De ce este mai simplă înmulţirea decât împărţirea?

— Deoarece împărţirea nu este definită în mod direct, precum înmulţirea sau

adunarea. Este definită pornind de la înmulţire, este *operaţia inversă* înmulţirii. Atunci când ne apucăm de o împărţire, trebuie avută în minte înmulţirea.

A

Ce este raportul — ? Este numărul C, câtul, care este un număr ce satisface relaţia BxC=A. A face o împărţire înseamnă a găsi numărul C care „se potriveşte”, cel care înmulţit cu *B* dă *A.*

— *De ce împărţirea, care este mai complicată, este mai importantă decât înmulţirea?*

— înainte de a vorbi despre împărţire, vom vorbi despre partaj. A partaja un număr *A* în două părţi înseamnă a găsi două numere a căror sumă este egală cu *A.*

A partaja o mulţime de şase elemente în două părţi. Submulţimi posibile: (1,5), (2,4), (3,3), (6,0). Dintre cele patru alegeri, una singură este „simetrică”: (3,3), cea care se obţine prin împărţirea la 2. împărţirea este SINGURA distribuţie egalitară. Aceasta este marea sa virtute. Cele două jumătăţi sunt egale, cele trei treimi egale etc.

Avem o părere proastă despre împărţire deoarece este o operaţie greu de efectuat, dar, dintre cele patru operaţii, este, fără îndoială, cea care furnizează cele mai multe rezultate importante. Divizorii oferă multe informaţii despre numărul pe care îl divid, după cum multiplii nu dau vreo informaţie despre numerele ai căror multipli sunt.

Fiecare număr admite o infinitate de multipli, în timp ce admite un număr finit de divizori; cei din urmă fiind în mod obligatoriu mai mici decât numărul.

— *Acest lucru are vreo legătură cu numerele prime? Au o importanţă atât de mare numerele prime?*

— O, da! Abia am văzut distincţia operată de greci între numerele divizibile cu 2 şi celelalte. O altă distincţie importantă a fost practicată între numerele care sunt divizibile prin anumite numere şi cele care nu sunt. Să luăm drept exemplu 6 şi 7. Primul este divizibil cu 2 şi 3, al doilea nu este divizibil deloc. Ca şi 2,3,5,11,13,17,19… pe care le numim *prime* deoarece nu le putem obţi-ne prin multiplicarea altor numere. Un

număr prim este cel ce nu are divizori (n.r. – proprii) şi care nu este multiplul niciunui număr.

Matematicienii sunt fascinaţi de ele din
cauza »
unui rezultat extrem de important: fiecare număr natural poate fi obţinut printr-un produs de numere prime. Dacă dispun doar de numere prime, pot obţine toate numerele!

Mereu aceeaşi idee: există anumite elemente ale unei familii ce permit construirea întregii familii? Precum triunghiurile ce permit construirea tuturor poligoanelor.

Numerele prime sunt „cărămizile” cu care construim toate numerele prin înmulţire. Fiecare număr natural este un produs de numere prime. Şi, dimpotrivă, orice număr întreg poate fi *descompus în factori primi.* Chiar mai mult, această descompunere nu se poate efectua decât într-un singur mod, ea este unică. în matematică, iubim cuvântul unic. Dacă un tip de obiect este unic, dacă o acţiune este unică, putem folosi articolul hotărât: tipul, acţiunea. Vom vorbi deci despre

descompunerea în factori primi a unui număr.

Spre a şti dacă un număr este prim, există întotdeauna o metodă: a verifica inexistenţa vreunui număr mai mic decât el care să îl dividă. Metodă greoaie, dar care dă mereu un rezultat. Iată definiţia: un număr prim este un număr care nu este divizibil decât cu 1 şi cu el însuşi.

— *Această definiţie m-a incomodat mereu. Divizibil cu 1, asta mă incomodează; la fel pentru divizibil cu el însusi? Ceea ce este interesant la 6*

>

este faptul că se divide cu 2 şi 3, nu cu 1 şi 6.

— Dar se divide cu 1?

— *Ce interes prezintă?*

— Te întreb dacă da sau nu, se divide cu 1?

— *Da.*

— Să avansăm încet. *B* şi C sunt divizori ai lui *A* dacă *A=BxC.*

Cum 6=2x3, 2 şi 3 sunt divizori ai lui 6. Dar 6=6x1, deci, conform definiţiei, 6 şi 1 sunt divizori ai lui 6. Oricare ar fi un număr *n, n=nxl,* deci *n* este divizibil cu 1

şi cu el însuşi. Iată de ce definim un număr prim ca neavând alţi divizori decât 1 şi el însuşi. Este o bună ilustrare a modului în care matematica funcţionează prin aplicarea, „cuvânt cu cuvânt”, a definiţiilor. Dacă nu s-ar fi precizat „divizori, alţii decât 1 şi el însuşi”, definiţia ar fi fost falsă.

— Sunt o mulţime de situaţii în care folosim 60, pentru ore, minute, secunde. 24 pentru zi, duzinile...

— Da, a existat o luptă pentru supremaţie între 10 şi 12. Superioritatea lui 12 rezida în marea sa divizibilitate, este mai divizibil decât 10.

Trebuie să împărţi în mod egal o duzină de ouă între oamenii aşezaţi în jurul mesei. Dacă sunt 2 oameni, 6 ouă pentru fiecare; dacă sunt 3,
4 ouă pentru fiecare; dacă sunt 4, 3 ouă pentru fiecare; dacă sunt 6, 2 ouă pentru fiecare. Patru situaţii favorabile.

>

Să presupunem acum că dispui de zece ouă. Două situaţii favorabile: 2 oameni, 5 ouă fiecare;
5 oameni, 2 ouă fiecare. Altfel spus,

doisprezece admite şase divizori, 1, 2, 3, 4, 6, 12, în timp ce zece admite doar patru: 1, 2, 5,10.

Să comparăm o sută şi şaizeci. O sută admite nouă divizori, în timp ce şaizeci admite doisprezece: 1,2,3,4, 5,6,10,12,15,20,30,60. Observă faptul că 60 este divizibil cu primele 6 numere, o mare realizare. Şaizeci, care este mai mic decât o sută – aproape jumătatea sa – are mai mulţi divizori decât o sută. Şaizeci este asul împărţirii.

Când te deplasezi pe un cerc, se preferă 60, nu 100. Timpul este măsurat în ore de 60 de minute. O oră poate fi împărţită în două jumătăţi de oră de 30 de minute, trei treimi de 20, patru sferturi de 15 minute, cinci cincimi de 12 minute şi şase şesimi de 10!

— Există numere cu şi fără virgulă, care este diferenţa?

— îţi aminteşti că dispuneam de două tipuri de numere, cele întregi şi fracţiile. Precum ştii, putem scrie oricând un număr întreg sub formă de fracţie, aş spune chiar sub formă de fracţii, la plural. 5 se scrie y, y etc. Toate fracţiile al căror

numărător este de cinci ori numitorul.

— Si invers nu?

— Unele fracţii se pot scrie sub formă de număr întreg.

— Când numărătorul este un multiplu al numitorului, tocmai ai spus.

3

— În celelalte cazuri, nu se poate. — nu va fi niciodată egal cu un număr întreg. A fost inventată o nouă scriere a numerelor, care are avantajul de a face să dispară linia de fracţie: dezvoltarea zecimală a numerelor. Fără numărător şi numitor, numărul se scrie pe un singur rând. O virgulă, la stânga sa o suită de cifre, *partea întreagă,* la dreapta sa o altă suită de cifre, *partea fracţio- nară.* 155,31 de exemplu. Această scriere generală permite scrierea tuturor tipurilor de numere. Numerele zecimale sunt cele care posedă un număr finit de zecimale nenule: —=0,125. Pe de altă

1 8

parte, —=0,133 nu este un număr zecimal.

— Cum se procedează pentru a traduce o fracţie în număr zecimal?

— Este cel mai simplu cu putinţă, se împarte numărătorul la numitor. se scrie 1,25, în timp ce y se scrie 3,333..., punctele de la dreapta indicând faptul că suita de 3 nu se termină. Cât despre 2, se scrie 2,0. Matematicienii arabi sunt cei care au definit numerele zecimale. 1325,2457, ce semnifică acest număr? Partea întreagă descompusă dă 1x1000+3x100+2x10+5x1, la care se adaugă partea zecimală, A_+ A_+ _Z_ Prima cifră de după virgulă este prima zecimală şi aşa mai departe.

Cu alte cuvinte, după virgulă procedăm cu zecimile, sutimile, precum înaintea sa cu zecile, sutele...

— *Au existat mereu numere negative?*

— O, nu! Numerele negative au apărut foarte târziu. Nici mesopotamienii, nici egiptenii, nici chinezii din Antichitate, nici măcar matematicienii greci nu au dispus de numerele negative.

— *Dar cum procedau fără numere negative?*

— Dintr-o cantitate *a* nu puteau scădea decât o cantitate mai mică, *b<a.* Dispuneau de o scădere limitată. în Europa, au fost dificultăţi în acceptarea noţiunii de „mai puţin decât nimic”.

Atunci când ne aflăm în faţa imposibilităţii de a rezolva o problemă suntem constrânşi să inventăm obiecte care ne vor permite să ajungem la liman. Atâta timp cât era vorba de a număra sau de a măsura mărimi fizice, numerele pozitive erau suficiente.

Cum să scazi 2 din 3? (3-2) este egal cu acel număr care, adunat cu 2, dă 3. Acest număr este 1. Aici am scăzut cel mai mic din cel mai mare. Dar cum să scad cel mai mare din cel mai mic? Multă vreme acest lucru a fost imposibil. Pentru a fi posibil, trebuia creat un nou număr, care adunat cu 3 să dea 2. Acesta a fost „-1”. Efectiv, 2 – 3 = -l, deoarece 3+(-l) = 2.

Fără prezenţa lui 0, numerele negative nu ar putea fi definite. Ce este -1? Este ceea ce trebuie adunat cu +1 pentru ca suma să fie 0.

Astfel, fiecare număr natural *n* are un „simetric faţă de zero”, numărul negativ -

n.

Numerele negative au fost inventate târziu, mult mai târziu decât fracţiile. Primii care au imaginat aceste noi numere au fost indienii, care deja inventaseră zeroul. în secolul al VH-lea, matematicianul indian Brahmagupta exprimase numerele pozitive şi negative în termeni de beneficii şi datorii. Toate situaţiile ce implică balanţe de datorii şi câştiguri nu pot exista fără o situaţie de echilibru, *neantul,* în care câştigurile echilibrează datoriile. Un câştig scăzut din nimic reprezintă o datorie: $a>0$, $0-(+a) = -a$. O datorie sustrasă din nimic reprezintă un câştig: $0-(-a) = +a$. Produsul şi câtul a două câştiguri sau a două datorii este un câştig: $a, b>Q, a x b>0, (-a) x (-b)>0$.

Produsul şi câtul dintre un câştig şi o datorie

este o datorie. $a x (-b)<Q, <0$. Dacă am şterge
, (-&)
o datorie...

— *Facem o donaţie! îmi place ideea. Este o altă viziune asupra lucrurilor.*

— Nu recunoşti ceva cumva?

— *Oare nu o fi regula semnelor?*

— Perfect. O mie de ani după matematicienii indieni, cantităţile negative ajungeau cu greu la poarta imperiului numerelor din Occident. în secolul al XV-lea, erau încă numite *numeri ab- surdi,* numere absurde. Mulţi mari matematicieni le-au respins. Pentru a obţine concret o cantitate negativă izolată, trebuia scăzut ceva din nimic: operaţie imposibilă, a scris Lazare Carnot, un mare matematician în anul 1802.

Astăzi, aceste numere nu mai pun niciun fel de probleme, întreabă-i pe copii. Pentru ei, -2 este al doilea nivel al subsolului parcării unde este garată maşina atunci când familia merge la cumpărături sâmbăta.

— *De ce se spune identităţi remarcabile şi nu egalităţi remarcabile?*

— Deoarece sunt egalităţi mereu adevărate, oricare ar fi valorile date variabilelor ce figurează în cadrul expresiei. în gimnaziu, la liceu, nu sunteţi puşi să învăţaţi pe de rost egalităţi, ci nu- mai identităţi, tocmai pentru că acestea

sunt întotdeauna adevărate.

Astfel, $(a\text{-}b)^2 = a^2+2ab+b^2$ este adevărată oricare ar fi valorile atribuite lui *a* şi *b.* La fel pentru $(a\text{-}b)^2 = a.^2\text{-}2ab+b^2$. La fel pentru $(a\text{-}b)(a+b) = a^2\text{-}b^2$. Ai remarcat, toţi termenii sunt de gradul 2: sunt produse de două numere: a^2, b^2, *2ab* şi *-2ab. a-b* şi *a+b* sunt de gradul 1, deci *(a-b)(a+b)* este de gradul 2.

Prima identitate $(o+fe)^2$ este un produs: *(a+b) (a+b),* pe care îl transformăm într-o sumă cu trei termeni. Să traducem: pătratul unei sume este egal cu suma pătratelor , adunat cu dublul produsului. La fel pentru $(a\text{-}b)^2$. A treia identitate este foarte interesantă, transformă un produs în sumă.

— *în diferenţă!*

— Bine, în diferenţă. în plus, cei doi termeni ai diferenţei sunt pătrate. Şi eu iubesc pătratele.

— *Pentru că sunt mereu pozitive?*

— Perfect. Ceea ce face ca eu să dispun de o informaţie suplimentară, este vorba despre o diferenţă între doi termeni pozitivi, a^2 şi b^2. întotdeauna este utilă cunoaşterea semnului unei expresii: dacă

este un număr dat, ştim ce semn are, dar dacă avem de a face cu o expresie scrisă cu litere (literală), nu ştim acest lucru. Există totuşi două expresii care ne oferă o asemenea indicaţie, pătratele a^2 şi valorile absolute (modulele), |a|, mereu pozitive. Oricare ar fi valoarea lui *a.*

Dacă ne confruntăm cu o inegalitate $A<B$ şi vrem să înmulţim cei doi membri cu un număr *a,* ce se întâmplă? Se păstrează sensul inegalităţii, aceasta este marea problemă. Dacă nu ştiu

nimic despre semnul lui *a,* nu pot deduce nimic privitor la inegalitatea dintre *aA* şi *aB.* Pe de altă parte, aş putea scrie $a^2A<a^2B$. Fiindcă, atunci când înmulţim cei doi termeni ai unei inegalităţi cu un număr pozitiv, nu se schimbă sensul inegalităţii.

— *Si distributivitatea?*

)

— Este un joc între adunare şi înmulţire. în funcţie de ce avem de făcut, putem alege între a opera cu sume sau cu produse. Cheia dintre relaţiile lor mutuale este *distributivitatea,* pe care o putem considera ca un „transformator", ce permite transformarea unei sume într-un produs şi, invers, a unui produs într-o sumă. Produsul dintre o sumă *(a+b)* şi o cantitate *c* este egal cu suma produselor *axb* şi *bxc:* *(a+b)xc=axc+bxc.* Distributivitatea acţionează asemănător cu iden-

»

tităţile remarcabile, transformă expresiile în altele mai practice, în funcţie de necesităţi.

— Care sunt fiinţele ce populează spaţiul geometriei?

— *Tot ceea ce vedem.*

— Numărul 3 îl vedem.

— *Tot ceea ce are o formă.*

— Numărul 3 are o formă.

— *3 îl scriem, o dreaptă o desenăm.*

— Bravo! Nu m-am gândit niciodată să o formulez astfel.

Ray o privi pe Lola cu o undă de admiraţie. Scânteile ei imprevizibile îl uimeau mereu. în secret, era mândru de ea.

— în primul rând, punctul. în general, îl uităm cu siguranţă fiindcă nu există nimic mai mic decât el. Toate figurile sunt constituite din puncte, numai din puncte, care sunt, întrucâtva, atomii geometriei.

Apoi, există figurile plane, cele curbe, cercurile, elipsele, cele rectilinii, triunghiurile, patrulaterele (pătrate, dreptunghiuri, romburi, paralelograme, trapeze) şi toate poligoanele. Apoi, figurile în spaţiu, cele *solide,* dintre care distingem, de partea celor curbe, celebrul trio sferă-cilin- dru-con, iar, de partea celor plane, piramidele. Să începem cu figura care ni se pare cea mai simplă, dreapta. Care este cea mai mare calitate a sa?

— Merge drept, nu face coturi, nu deviază...

— ... nu-şi schimbă niciodată direcţia, menţine orientarea, nu revine asupra paşilor săi.

— De aceea vorbim despre axa timpului?

— Da, timpul nu se întoarce niciodată. O singură dată avem cincisprezece ani! Trebuie profitat de asta. Multe fenomene naturale sunt legate de dreaptă. Planta, atrasă de cer, creşte drept. Atrasă de Pământ, piatra cade drept. Apoi, lumina se deplasează în linie dreaptă.

O dreaptă este compusă dintr-o

infinitate de puncte. Trebuie deci să cunosc o infinitate de puncte pentru a o defini? Două sunt de ajuns! Efectiv, „prin două puncte nu trece decât o dreaptă” este una dintre axiomele geometriei. Astfel, două puncte *definesc* o dreaptă. Ce înseamnă că „definesc”? înseamnă că datele a două puncte sunt suficiente spre a defini o dreaptă. *A* şi *B* fiind două puncte, putem spune deci „dreapta *AB”.* Pornind de la aceste două puncte, le obţinem pe toate celelalte, o infinitate!

Cea mai mare virtute a dreptei rezidă într-o proprietate: este cel mai scurt drum între două puncte. Este distinsă ca fiind modalitatea cea mai... directă de a uni două capete, într-un plan, insist.

— De ce spui „insist”?

— Deoarece nu este adevărat în alte spaţii geometrice, precum suprafaţa unei sfere, de pildă.

— Trebuie să precizezi acolo unde este adevărat ceea ce este adevărat, nu-i aşa?

— Exact. Acum curbele. în timp ce dreapta nu are deviaţii, curba îşi schimbă direcţia, fără a face vreun unghi. Rectiliniu, rectitudine, direct, direcţie,

aliniat – pentru dreaptă. Arc, curbat, inflexiune, ondulat, cambrat, rotund – pentru curbă.

Să luăm două drepte *d* şi *d'.* Să presupunem că se întretaie în două puncte. Or tocmai am văzut că, prin două puncte, nu trece decât o singură dreaptă. Deci, dacă două drepte se întretaie în două puncte – sau mai multe – ele se confundă. Pot deci să afirm că dacă două drepte diferite se întretaie, acest lucru are loc într-un singur punct.

Obţinem două propoziţii simetrice: „două drepte definesc un punct”, „două puncte definesc o dreaptă”. Interschimbăm cuvintele *dreaptă* şi *punct,* proprietatea rămâne adevărată! Iar dacă nu se întretaie…

— *Sunt paralele.*

— Nu neapărat! Ele pot să nu se întretaie şi totodată să nu fie paralele. Ele pot, cum să spun, să se ignore, să treacă una pe lângă alta cumva. Cu siguranţă, ai observat pe cer urme lungi şi albe care se întretaie, traiectorii de avioane. Am putea spune că au avut mare noroc. De fapt, nu era niciun risc, traiectoriile nefiind în

acelaşi plan, avioanele nu pot intra în coliziune.

Două drepte nu pot fi paralele decât dacă sunt în acelaşi plan, deci propoziţia „două drepte sunt fie paralele, fie *secante”* nu este adevărată decât în plan. în spaţiu, există o altă posibilitate: două drepte pot să nu fie nici paralele, nici secante. în treacăt fie spus, iată un bun exemplu pentru nevoia de a preciza în ce univers se afirmă un adevăr.

Deci, fie *d* şi *d'* două drepte din plan. Dacă acestea au

- 0 puncte comune, ele sunt *paralele;*
- 1 punct comun, ele sunt *secante;*
- 2 puncte comune, ele sunt confundate şi scriem *d=d'.*

Două puncte definesc o dreaptă. Tocmai am spus ceva fals!

— *Două puncte M şi M' nu definesc o dreaptă? Ai spus aceasta ceva mai devreme.*

— Nu am spus două puncte *distincte.*

— *Sunt distincte, din moment ce ai considerat două.*

— Am considerat două, desigur, dar nimic nu mă poate asigura că nu este

ACELAŞI punct.

— Dar nu au acelaşi nume! Unul se numeşte M şi celălalt M'.

— Da, dar nimic nu interzice ca M şi M' să fie două nume diferite ale aceluiaşi punct.

— Atunci?

— Dacă doresc ca ele să fie diferite, solicit pur şi simplu acest lucru. Precizez: două puncte diferite M şi M' definesc o dreaptă. Dar trei puncte... diferite? Depinde de situaţia celui de-al treilea. Dacă este coliniar cu primele două, apariţia sa nu aduce nimic nou, se află pe dreapta deja definită.

Dacă, dimpotrivă, nu este coliniar cu primele două, apariţia sa schimbă totul! Cele trei puncte definesc un triunghi şi mai definesc totodată un plan. Sosirea acestui punct *necoliniar* determină un salt formidabil, face trecerea de la o dreaptă la un plan, măreşte în mod considerabil spaţiul!

— Apropo, două drepte care se întretaie câte unghiuri formează? Două? Patru?

— îţi mărturisesc că şi mie unghiul mi

s-a părut mereu un obiect complicat. Unghi, de la cuvântul grecesc *ankon,* „cot”, sau din latinescul *angulus,* „colţ”. S-a vorbit mult timp despre „înclinare”, un unghi fiind înclinarea unei drepte pe o alta. Este grăitor, dar nu este nici foarte precis, nici foarte operativ. Astăzi spunem: două drepte secante delimitează patru spaţii. Fiecare dintre ele este un unghi.

Aceste patru unghiuri nu sunt toate diferite între ele, cele opuse la vârf sunt egale. Au acelaşi vârf, iar laturile lor sunt paralele. Există deci câte două perechi de unghiuri egale.

Există un caz particular în care toate cele patru unghiuri sunt egale. Aceasta este definiţia unghiului drept, este cel care ilustrează egalitatea celor patru unghiuri. Acolo nu mai vorbim de măsura lor în grade (hexazecimale sau zecimale), ci de o situaţie geometrică particulară, egalitatea a patru unghiuri, spre a defini într- un mod natural unghiul fundamental, unghiul drept, unghi de referinţă. Unghiurile mai mici decât cel drept, cele *ascuţite,* din latinescul *acu- tus,* cele

obtuze, mai mari decât cel drept. Două unghiuri drepte formează un unghi plat, patru fac un tur complet. Apoi, au fost definite unităţi de măsură a unghiului: cele două tipuri de grade şi *radianul,* uneori şi perioada.

— *De ce sunt unităţi diferite de măsură pentru unghiuri?*

— în timpul Revoluţiei Franceze, a fost definit un nou sistem de măsură, *sistemul metric zecimal,* cu unităţile sale, metrul, kilogramul etc., care se declină toate cu 10, multiplii şi submultiplii lor fiind din 10 în 10. Prin aceasta era complet nou şi mult mai uşor de utilizat decât sistemele precedente. Măsurile unghiurilor fiind, în mod obişnuit, bazate pe 60, s-a decis zecimaliza- rea lor, cu scopul de a fi integrate în noul sistem. S-a inventat gradul bazat pe 10, definit în aşa fel încât unghiul etalon, cel drept, să măsoare 100 de grade.

— *Care este diferenţa dintre ortogonal şi perpendicular?*

— Dacă ai în minte adjectivele, niciuna. Ortogonal vine din grecescul *orthos-gonos,* „unghi drept”, iar perpendicular,

din latinescul *perpen- diculum,* „fir cu plumb”. Firul cu plumb, precum ştii, este vertical şi face un unghi drept cu planul pământului.

Dar, ca substantiv, spunem o perpendiculară şi niciodată o ortogonală, care nu există decât ca adjectiv. Vorbim de ortogonalitate şi nu de perpendicularitate. Utilizarea principală a or- togonalităţii este calculul distanţelor. De exemplu, pentru calculul distanţei de la un punct *M* la o dreaptă, „coborâm” perpendiculara din acel punct pe dreaptă. Aceasta taie dreapta în punctul *H.* Ei bine, distanţa de la *M* la dreaptă este lungimea segmentului *MH.* Pentru a calcula distanţa dintre două drepte paralele, se trasează o perpendiculară pe cele două drepte. Aceasta le taie în punctele *H* şi *H'.* Ei bine, lungimea segmentului *HH'* este distanţa dintre cele două paralele. Ştii ce înseamnă paralel? Cuvântul provine din grecescul *paralelos,* „plasat la vedere”. Două drepte paralele se văd mereu una pe cealaltă, pe toată lungimea lor. Uite, în treacăt, ce pot deduce despre egalitatea dreptelor *D* şi D', dacă acestea sunt

paralele? Nimic. Deoarece *d* este paralelă cu drepte diferite de ea însăşi, dar este, de asemenea, paralelă cu ea însăşi. Dacă *ELF,* ce pot deduce din asta? Pot afirma că *E * F,* deoarece o dreaptă nu este perpendiculară pe ea însăşi.

Deseori, ortogonalitatea ne permite demonstrarea paralelismului. De exemplu, în plan, dacă o dreaptă *H* este perpendiculară pe două drepte *D* şi *D*', acestea din urmă sunt paralele. Dacă *H*1*D* şi H± *D',* atunci *DUD'.*

— De ce petrecem atâta timp asupra triunghiului?

— Este cea mai mică figură rectilinie închisă.

Privirea Lolei trăda neînţelegerea.

— Explic ceea ce am spus. Nu putem construi un spaţiu închis cu mai puţin de trei segmente. Cu două segmente, nu vei avea decât un spaţiu deschis spre toate zările.

— Vrei să spui că, dacă doresc să mă izolez, nu o pot face decât în interiorul unui triunghi?

— Nu, afirm că, pentru a dispune de un

spaţiu închis, nu ai nevoie de o figură cu mai mult de trei laturi.

— *Dar cercul, totuşi?*

— Am spus cu atenţie ceea ce am spus: cea mai mică figură închisă RECTILINIE. Dacă uiţi un cuvânt, devine fals.

— *Şi e important?*

— Să fii într-un spaţiu limitat sau nu? Este o deosebire capitală. Triunghiul, pătratul, cercul sunt închise. Dreapta, parabola nu sunt, ele sunt nelimitate. Ele nu delimitează o regiune a cărei arie poate fi calculată.

— *Numai figurile închise au o suprafaţă, celelalte nu?*

— Cum ai vrea să defineşti suprafaţa, aria unei regiuni nelimitate? Nu se ştie ce este suprafaţa unei figuri deschise, acest lucru nu este definit. Astfel, nu vom vorbi niciodată despre suprafaţa unui unghi, nu are sens. Să revenim la triunghiuri, ce au toate în comun? Suma unghiurilor lor este egală cu 180°. Ceea ce face ca triunghiul să se „închidă”.

Această proprietate capitală îmi permite să afirm că, atunci când cunosc două unghiuri, îl cunosc şi pe al treilea,

dat fiind că le cunosc deja suma. Din nefericire, nu există un rezultat asemănător pentru laturi. Dacă eu cunosc lungimile a două laturi, nu pot să deduc lungimea celei de-a treia.

O altă consecinţă: un triunghi nu poate avea decât un singur unghi obtuz. Dacă ar avea două, suma lor ar fi mai mare de 180°! Putem deci anunţa faptul că nu există decât două tipuri de triunghiuri, cele care au trei unghiuri ascuţite şi cele care au două ascuţite şi unul obtuz. Referitor la triunghiul dreptunghic: dat fiind că unul dintre unghiuri este drept, suma celorlalte două, ascuţite, este de 90°.

Cunoaşterea celor trei unghiuri ale unui triunghi nu determină lungimea laturilor, deci nu spune nimic despre „mărimea” sa, dar ne indică *forma.* Ştim, de asemenea, că două triunghiuri care au aceeaşi formă, deci aceleaşi unghiuri, au laturile proporţionale:

AB AC BC

A'B' AC BC

— Da, dar de ce sunt atât de

importante triunghiurile?

— Deoarece cu triunghiuri se pot construi toate poligoanele, oricare ar fi numărul lor de laturi. Rombul? Două triunghiuri isoscele identice, cu bazele lipite. Pătratul? Două triunghiuri dreptunghice isoscele identice cu ipotenuzele lipite. Dreptunghiul? Două triunghiuri dreptunghice identice cu ipotenuzele lipite. Când pleci în călătorie, nu te încarci cu toate poligoanele. Iei numai triunghiurile. Ai nevoie de un pentagon, scoate trei triunghiuri din geanta ta şi ţi-ai făcut pentagonul. Un octogon? Scoate şase.

Altceva: „vizibilitatea” triunghiului! O maşină goneşte prin ceaţă, şoferul vede deodată un triunghi roşu pe şosea, frânează. Un camion este oprit pe dreapta. Şoferul a evitat accidentul. Pune un pătrat, un pentagon, un cerc, un triunghi. îndepărtează-te, care se distinge cel mai bine? De ce o fi ales Poliţia Rutieră un triunghi spre a avertiza un pericol? Deoarece este figura cea mai vizibilă: are obligatoriu un unghi ascuţit, iar un unghi ascuţit „înţeapă”. De altfel,

spre a indica o direcţie, desenăm o săgeată, adică o linie urmată de un triunghi. Iar litera greacă *delta* este reprezentată de un triunghi, Ă, care este forma deltelor fluviilor.

Să vedem care sunt legăturile dintre vârfuri şi laturi. Fiecare vârf admite două laturi *adiacente,* fiecare unghi admite o *latură opusă,* una singură. Putem spune deci laturA opusă la vârf. Dar nu putem proceda la fel în cazul unui dreptunghi, deoarece fiecare vârf are două laturi opuse.

Vom defini câteva linii remarcabile ale triunghiului, înălţime, mediană, mediatoare, bi- sectoare. *înălţimea* este perpendiculara coborâtă dintr-un vârf pe latura opusă, lungimea sa este deci distanţa dintre un vârf şi latura opusă. *Mediana* este dreapta care leagă un vârf de mijlocul laturii opuse. *Mediatoarea unei laturi* este dreapta perpendiculară pe acea latură în mijlocul său. *Bisectoarea unui unghi* este semidreapta care împarte unghiul în două unghiuri egale.

— *Trei înălţimi, trei bisectoare, trei mediatoare, trei mediane. Triunghiul este*

regele lui trei!

— Am putea-o spune. L-ai putea numi de asemenea un „trilaturi”. Să trasăm o mediatoare. Să trasăm o a doua, se intersectează cu prima, bine. Să o trasăm pe a treia, trebuie să se intersecteze cu celelalte două undeva, dar unde? Se intersectează cu ele în exact acelaşi punct unde s-au intersectat primele două! Şi acest fapt este extraordinar. O adevărată surpriză, cele trei mediatoare se întretaie în acelaşi punct! Cum se poate explica acest eveniment? Deoarece, evident, există motive. Suntem în căutarea unei demonstraţii. Demonstraţia survine după surpriză, are ca scop răspunsul la întrebarea: de ce are loc o asemenea întâmplare uimitoare? Dacă va reuşi, ea ne va dezvălui motivele. Faptul în sine poate va rămâne la fel de surprinzător, dar nu va mai fi un mister.

— *Este exact ceea ce îţi spuneam mai înainte. În matematică totul se justifică, totul are un motiv.*

— Aceasta este convingerea matematicienilor, cel puţin. Ei vor să înţeleagă, să explice, să justifice. Ai

prefera un univers în care nu ar fi nicio explicaţie la ceea ce se întâmplă?

— *Prefer un univers în care nu totul să aibă o justificare. Ceea ce nu înseamnă că doresc ca nimic să nu aibă o justificare.*

— Explicaţia nu înlătură minunea. Odată risipit misterul, rămâne frumuseţea, care este chiar mai mare atunci când înţelegem de unde provine. Dar nu am terminat cu surprizele; acest fapt surprinzător referitor la mediatoare are loc şi în cazul bisectoarelor: se întretaie în acelaşi punct. Şi medianele, şi înălţimile se întretaie în acelaşi punct. Ele sunt *concurentei* Este ca şi cum ar exista în triunghi, în forma sa geometrică, o forţă de atracţie care-i leagă elementele şi le face să se întâlnească. Aceste puncte de intersecţie sunt, evident, puncte remarcabile în triunghi. De exemplu, punctul în care se intersectează medianele este un loc strategic: *centrul de greutate* al triunghiului. Un mic experiment: aşază un triunghi de metal pe un cui. Nu stă în echilibru şi cade. Plasează cuiul în centrul de greutate, şi triunghiul va sta în echilibru! Altă

remarcă, ai observat deja noile scutere cu două roţi în faţă? Sunt perfect stabile şi, la oprire, conducătorul nu este nevoit să pună un picior jos pentru a-şi păstra echilibrul scuterului. Deoarece trei roţi, dacă nu sunt în linie, formează un triunghi! Iar triunghiul este stabil. Pentru a dispune de un vehicul stabil, nu este nevoie de o maşină cu patru roţi.

— Iată de ce am început cu o tricicletă!

— Vezi, e folositoare matematica.

— De ce există cazuri de congruenţă doar pentru triunghiuri?

— Atunci când definim o familie de obiecte, primul lucru pe care îl facem este să decidem când avem dreptul de a declara că două dintre elemente sunt egale. în geometrie, două obiecte sunt egale dacă le putem suprapune, adică dacă elementele lor sunt egale. Trebuie deci trecute în revistă toate elementele componente şi comparate. Ne putem întreba dacă există modalităţi mai „economice”, care să compare doar o parte dintre componente.

Să luăm drept exemplu cercurile. Pentru a demonstra egalitatea a două

cercuri, este suficient să demonstrăm că diametrele lor sunt egale sau că circumferinţele lor sunt egale. O singură egalitate este suficientă. Este normal, deoarece un cerc este complet definit de diametrul sau de circumferinţa sa.

Caz de egalitate a cercurilor: două cercuri sunt egale dacă diametrele lor sunt egale.

Dar pentru triunghiuri? Un triunghi este format din trei unghiuri şi trei laturi. Ar trebui deci stabilite şase egalităţi pentru a realiza congruenţa a două triunghiuri. De fapt, cinci, deoarece, cunoscând două unghiuri, îl cunoaştem şi pe cel de-al treilea. Există oare vreo variantă mai „economică”? Răspunsul este afirmativ. Acesta este rolul celor trei cazuri de congruenţă. Primul caz, de exemplu: dacă două triunghiuri au o latură de aceeaşi lungime, cuprinsă între două unghiuri cu aceeaşi măsură, atunci sunt congruente. Două egalităţi de unghiuri şi una de lungime, trei egalităţi în loc de cinci. Altă interpretare a unui caz de congruenţă: dacă îmi fixez o latură şi două unghiuri adiacente, nu pot trasa

decât un singur triunghi.

— *De ce, de fiecare dată când vreau să trasez un triunghi oarecare, trasez unul isoscel sau drep- tunghic?*

— Este doar o impresie. Dacă ai măsura efectiv laturile, te-ai convinge că sunt diferite, la fel şi pentru unghiuri. Triunghiurile oarecare, prin definiţie, nu au proprietăţi particulare, nu au laturi egale, nu au unghiuri egale, nu au unghiuri drepte. Or rezultatele pe care le obţinem în matematică sunt consecinţe ale proprietăţilor obiectului; cu cât este mai general, cu atât posedă mai puţine proprietăţi şi cu atât se stabilesc mai puţi- ne rezultate cu privire la el. De aceea studiem cel mai des triunghiurile dreptunghice, isoscele sau echilaterale şi pătratele şi romburile.

Grecii spuneau că anumite triunghiuri aveau „două picioare egale”, deci le-au numit *iso-ske- losl Iso:* „acelaşi”, *skelos:* „picioare”. Isoscele. Cât despre triunghiul care are trei laturi inegale, cel „oarecare” a fost numit mult timp „scalen”, triunghi şchiop.

Lola începu să râdă.

— *Triunghiurile şchioapătă, iar cercurile nu se învârt în cerc. Geometria este strâmbă!*

— Şi totuşi stă în picioare de douăzeci şi cinci de secole! Am vorbit despre legăturile dintre triunghiurile dreptunghice şi cele oarecare, apoi dintre triunghiuri şi poligoane. Vom examina legăturile dintre poligoane şi cercuri. Dacă iau un poligon, există un cerc care să treacă prin toate vârfurile sale? Dacă un asemenea cerc există, el poartă numele de *cerc circumscris* poligonului. Este cel mai mic cerc ce conţine întreg poligonul. Demonstrăm că orice triunghi admite un cerc circumscris. Si că acest cerc este unic. De ce? pentru că, dacă două cercuri trec prin aceleaşi trei puncte, vârfurile triunghiului, acestea sunt identice. Cum se trasează acest cerc? Unde se află centrul său? în punctul de intersecţie al mediatoarelor! De ce? mediatoarea joacă un rol foarte important pentru segmente. Este *locul geometric* al punctelor situate la distanţă egală de capetele segmentului. Dacă punctul de intersecţie al mediatoarelor se află pe prima mediatoare,

el este echidistant faţă de *A* şi *B,* dacă se află pe a doua, este echidistant de *B* şi C. Deci, este echidistant de *A, B* si C. Este deci centrul cercului ce trece prin *A, B* şi C, deci al centrului cercului circumscris triunghiului *ABC.*

— *Patrulaterele au toate un cerc circumscris?*

— Nu. Pătratul şi dreptunghiul admit unul, dar nu şi rombul, trapezul oarecare. După cum nici un patrulater oarecare. A admite un cerc circumscris este o „bună" proprietate pentru un patrulater care, în acest caz, este numit *inscriptibil.*

— *Triunghiul este regele lui trei, iar patrulaterul regele lui patru?*

— Nu. Un patrulater are, desigur, patru unghiuri, patru laturi etc., dar numai două diagonale. Am afirmat mai devreme că orice patrulater este compus din două triunghiuri. Suma unghiurilor unui triunghi fiind egală cu 180°, este o consecinţă firească faptul că suma unghiurilor unui patrulater este egală cu 360°, sau patru unghiuri drepte.

în acelaşi fel în care am clasat triunghiurile în funcţie de anumite

proprietăţi vom clasa şi patrulaterele, punând în practică trei criterii: a avea unghiuri drepte sau nu, a avea laturile opuse egale sau nu, a avea laturile opuse paralele sau nu.

Patru laturi egale: romb. Patru laturi egale şi unghiuri drepte: pătrat. Unghiuri drepte şi laturi opuse egale: dreptunghi. Laturi opuse egale: paralelogram. O pereche de laturi opuse paralele: trapez.

Pătratul este cel mai simplu dintre patrulatere, este suficientă o singură informaţie, lungimea laturii, pentru a-l determina, pentru a-l *defini,* am putea spune deci, pătratul de latură 2. în cazul dreptunghiului, sunt necesare două informaţii, lungimile laturilor. Spunem dreptunghiul 2, 3. Cât despre paralelogram, avem nevoie de trei date, lungimile laturilor şi valoarea unghiului format de aceste laturi.

— *De ce este importantă simetria?*

— Deoarece, atunci când o figură este simetrică, o putem reconstitui complet pornind de la o parte a sa. Cu o parte obţin tot. Simetria este o noţiune geometrică, nu există numere simetrice.

Se disting două tipuri de simetrie, *simetria axială,* raportată la o dreaptă, şi *simetria centrală,* raportată la un punct. Aceste două simetrii sunt legate: dacă o figură este simetrică în raport cu două drepte, este simetrică central în raport cu punctul de intersecţie al celor două drepte.

Triunghiul isoscel este simetric în raport cu una dintre înălţimile sale. Triunghiul echilateral este simetric în raport cu cele trei înălţimi ale sale, deci în raport de simetrie centrală cu punctul de intersecţie al acestora. Pătratul şi rombul sunt simetrice în raport cu cele două diagonale ale lor. în fine, cercul este simetric în raport cu toate diametrele sale, deci şi în raport cu centrul său. Cercul este regele simetriei.

Ai remarcat că toate terenurile de sport pe care se confruntă două echipe sau doi jucători sunt simetrice faţă de o linie mediană? Fotbal, handbal, rugby, tenis, volei, ping-pong. De ce? pentru ca cele două echipe să dispună de un teren identic: suprafaţă *egală, aceeaşi dispunere a porţilor, afileurilor, cu scopul*

de a nu fi favorizată niciuna dintre ele.

— La ce foloseşte cifra n?

— Cifra?

— Bine, bine, NUMĂRUL n.

— Este un număr care spune ce este un cerc, ne vorbeşte despre natura sa.

— Când a fost descoperit n?

— încă din Antichitatea timpurie, oamenii care se ocupau cu calcule au remarcat faptul că toate cercurile, indiferent de mărime, aveau ceva în comun: diametrul şi circumferinţa păreau a fi în acelaşi raport. Această legătură numerică părea independentă de mărimea cercului. Se putea deduce din scrieri că, pentru evrei, în Biblie, acest raport era egal cu 3; pentru babilonieni era 3+—, adică 3,125; pentru egipteni, cu şaisprezece

8 *I* »2

secole înaintea erei noastre, |—| = 3,160; pen- \ 9 /

tru Arhimede, în anul 250 înaintea erei noastre, raportul era mărginit de 3,1408 şi 3,1429; pentru chinezi, la începutul erei noastre era 3,162; în India, în secolul al III-lea, era noastră, era 3,1416.

Cercul posedă două elemente remarcabile, circumferinţa şi diametrul.

Raportul dintre aceste două lungimi

7

4

este constant, nu depinde de mărimea cercului. Valoarea sa *caracterizează* forma circulară.

Acest raport între „rotundul” circumferinţei şi „dreapta” diametrului a fost târziu denumit TI în Occident, de la *periphereia,* „jur-împrejur”. Acest raport ne indică faptul că toate cercurile sunt asemănătoare: putem spunem că, în lume, toate cercurile sunt la fel, exceptând mărimea sau, altfel spus, că există un singur fel de a fi cerc.

Ceea ce nu este cazul pentru triunghiuri sau pentru dreptunghiuri, de exemplu, ele nu sunt asemănătoare, nu au toate aceeaşi formă.

— *Cu cât este egal n, exact?*

— Exact? Acesta este miezul problemei, Lola! Mă întrebi „care este valoarea sa exactă?”, îţi răspund, „valoarea exactă a lui 7t este TT!”

Figură mirată a Lolei.

— Nu mă privi aşa. Este singurul răspuns valabil.

— *Şi* $\frac{22}{7}$?

— **Dacă π ar fi egal cu $\frac{22}{7}$, l-am numi pur şi mplu $\frac{22}{7}$ şi nu am mai face din el, precum spui** tu, „o brânză”, mergând în căutarea unei litere greceşti. îţi voi da încă două exemple: dacă vrei să ştii cu cât este egal 1 împărţit la 3, poţi efectua operaţia şi vei găsi 0,333333... Poţi continua oricât de mult, nu va fi niciodată o valoare exactă. Se ştie, în prezent, pentru că s-a demonstrat, că 7t nu se va putea scrie niciodată ca număr zecimal, după cum nici sub formă de fracţie. Dar îl vom putea aproxima din ce în ce mai bine. I s-au calculat primele 1241 de miliarde de zecimale!

Singurul răspuns la întrebarea „cu cât este egal TI?” este „7i este egal cu TT”.

Apropo, te plimbi liniştită pe la ţară şi, în loc să mergi drept, te hotărăşti să faci un ocol circular. Ştii cât te va „costa”? Traseul tău va fi de — ori ’ 2 mai lung! Cu aproximaţie de 1,57 ori mai lung!

Mă întrebai, adineaori, ce îi poate interesa pe matematicieni. Una dintre marile întrebări pe care şi le pun şi pe care şi noi ne-o punem frecvent în viaţă: când solicităm ceva, căutăm care este „cel mai mic” obiect care corespunde acestei solicitări, *obiectul minimal?* Sau „cel mai mare”, *obiectul maximal?*

De exemplu, am un perimetru fixat şi întreb, dintre toate figurile cu acest perimetru, care este cea care are cel mai mare „interior”. S-a demonstrat că este cercul. El este cel care înglobează maximum de spaţiu într-un anumit contur. Iată o informaţie foarte utilă. Să presupunem că dispui, pe de o parte, de o îngrăditură neextensibilă şi, pe de alta, de o vacă. Pentru a-i oferi maximum de hrană, trebuie să-i faci o împrejmuire circulară. Cu orice altă figură, pătrat, triunghi, vei obţine o suprafaţă mai mică. Dacă ai fi făcut o împrejmuire pătrată, ar fi fost de 0,786 ori mai mică şi ai fi privat vaca de mai mult de 21% din iarba

7

minunată!

— *De ce este atât de importantă teorema lui Pitagora?*

— Este, fără îndoială, una dintre primele teoreme din istoria matematicii. Era prezentă la mesopotamieni şi la egipteni, care remarcaseră că anumite triplete de numere întreţineau un raport ciudat cu pătratul lor. Cunoşti această relaţie, suma pătratelor a două dintre ele este egală cu pătratul celei de-a treia (3,4,5). Efectiv, $3^2+4^2=5^2$, (5; 12; 13), (6; 8; 10), (8; 15; 17), (12; 16; 20). Mai târziu, s-a demonstrat că, dacă laturile unui triunghi satisfac această legătură, triunghiul este dreptunghic. Pitagora va fi cel care va face această demonstraţie, şi de atunci înainte s-a vorbit de teorema lui Pitagora.

Acţiunea se desfăşoară într-un triunghi, mai precis teorema spune: o informaţie despre un unghi (unghi drept), şi furnizează o informaţie despre laturi şi dimpotrivă.

Un triunghi este dreptunghic doar dacă laturile sale respectă relaţia $a^2+b^2=c^2$.

Deci, de fiecare dată când găsim trei numere astfel încât suma pătratelor a două dintre ele este egală cu pătratul celui de-al treilea, putem construi un triunghi dreptunghic. Această relaţie între lungimi ne oferă o metodă de a construi unghiuri drepte. Ne oferă, totodată, şi metoda de a măsura lungimi: dacă am un unghi drept şi cunosc lungimile a două laturi, teorema lui Pitagora îmi permite să calculez lungimea celei de-a treia laturi. Este o situaţie foarte frecventă.

>

— *De ce spunem: fie x necunoscuta?*

— Deoarece *x* este tocmai ceea ce nu cunoas-

> tem si vrem să aflăm…

>

— *Asta am înţeles, dar de ce necunoscută, la feminin?*

— Nu ştiu. Poate pentru că femeile sunt mai secretoase, mai misterioase, mai greu de descoperit. ..

— *Şi apoi pentru că pun mereu probleme, nu-i asa?*

— O cauţi cu tot dinadinsul?

— *Da.*

— Mai bine spune-o direct. Atunci când încerc să aflu identitatea unui lucru, trebuie să încep prin a da un nume acelui lucru. Dacă nu îi dau un nume, nu voi avea cum să îl „ţin sub control” şi să îl cercetez. Ce opţiuni am? Să-i dau numele

7

unui număr cunoscut? De exemplu 8. Ar fi stu-

7
8

pid. Dacă *apriori* decid că necunoscuta este egală cu 8, probabil ar fi fals. Problema ar fi rezolvată, dar pe o cale falsă! Şi asta dinainte de a începe.

îi voi atribui deci un nume temporar, x, care permite oricărui număr să fie necunoscuta pe care o caut, fără a restrânge, astfel, aria căutării mele.

Acest nume temporar îmi permite să lucrez, să efectuez calcule, pentru a avansa în identificarea necunoscutei.

îi voi atribui acest nume doar momentan şi, până voi fi ajuns la identificarea sa, necunoscuta se va numi x. Când o voi fi identificat, ea îşi va abandona numele de împrumut, luându-şi adevărata identitate, pe care o voi fi descoperit-o.

într-o anchetă, pentru a denumi persoana necunoscută, se spune „vinovatul”, „asasinul”, „suspectul”, uneori chiar „domnul x” sau „doamna x”. Ancheta ia sfârşit atunci când a fost „identificată” persoana căutată, deci vinovatul, asasinul.

Mai general, există o mare similaritate

între rezolvarea unei probleme de matematică şi o anchetă a Poliţiei: avem indicii, informaţii, piste, piste false, momente de exaltare, în care ai impresia că ai făcut progrese, sau de depresie în caz contrar, şi, atunci, se încearcă găsirea unui cadru coerent, în care totul devine clar, în care înţelegem, în sfârşit, ceea ce se întâmplă sau ceea ce s-a întâmplat şi se pot aduce dovezi în acest sens.

— *Care este diferenţa dintre o egalitate şi o ecuaţie?*

75 75

— Ei bine, — = 25 este o egalitate, — –

x = 0 . 75 .75

este o ecuaţie. — – 25 si — – x nu sunt nici
ega- ’ 3’3

lităţi, nici ecuaţii, după cum nici *(x-y).* Putem spune doar că sunt expresii.

O egalitate este o expresie matematică, în care figurează semnul = şi numere cunoscute. în cazul unei egalităţi nu se poate pune decât în-

75

trebarea: „este adevărată sau falsă?” — = 25 este

12 19 adevărată. este ^a^sa>

precum am văzut mai devreme.

— Dacă este o egalitate, este adevărată!

— Ei bine, nu! Reia definiţia mea: o egalitate este o expresie matematică, în care figurează semnul = şi numere cunoscute. Cât despre ecuaţie, este o expresie matematică, în care figurează semnul egal, după cum şi numere cunoscute şi alte necunoscute: 2xx+3=7.0 ecuaţie nu este nici adevărată, nici falsă, este expresia unei *constrângeri,* în cazul de faţă „dublul numărului *x* adunat cu 3 trebuie să fie egal cu 7”. Egalităţile şi ecuaţiile au doi *membri.* Mie îmi place să îi numesc *maluri,* cele două maluri ale semnului egal.

— Constat că eşti în continuare la fel de poet. Şi ce curge între cele două maluri ale semnului egal?

— Imaginează-ţi! Marele joc, dacă pot să o spun, este acela de a face să treacă termeni de pe un mal pe celălalt. Pentru a trece de semnul egal, care este un fel de frontieră, trebuie respectate în mod imperios o serie de formalităţi.

A rezolva o ecuaţie constă în

determinarea

mulţimii de valori ale *necunoscutei x,* care satisfac constrângerea. Pentru a ajunge la aceasta, se transformă pas cu pas ecuaţia de la început într- o suită de ecuaţii echivalente, susceptibile de a ne conduce la soluţie, până la „izolarea” necunoscutei în membrul din stânga, cu alte cuvinte, până la obţinerea unei ecuaţii de forma *x=A, A* fiind o expresie numerică ce conţine doar numere cunoscute. Diferitele valori ale necunoscutei sunt *soluţiile* ecuaţiei.

Cum se procedează cu ecuaţiile? Regulă de aur, dacă se modifică *exact în acelaşi fel* cele două părţi ale unei ecuaţii, se obţine o ecuaţie echivalentă, aceasta este arma principală. Adun 2 la dreapta, adun 2 la stânga. Multiplic cu 2 la dreapta, multiplic şi la stânga etc.

Cum se manipulează necunoscuta? Se adună, se scad, se înmulţesc *x* exact ca şi numerele cunoscute. La împărţire, atenţie, dacă *x* este la numitor, trebuie stabilit să fie diferit de zero, ştii de ce.

Căutând să izolez x la stânga, voi

încerca, cum să spun, să trec maximum de lucruri la dreapta. $2x+3 = 7$. Pentru a face să dispară 3, adun -3 în ambele părţi: $2x+3-3 = 7-3$, deci $2x=4$. Pentru a izola x pe malul stâng, trebuie să fac să dispară factorul lui x, 2. în acest scop, împart la 2 cei 2x 4
doi membri ai egalităţii. —- – —. Rezultatul $x=2$. Iată necunoscuta identificată! Este important ca, înainte de a anunţa rezultatul, să îmi iau o măsură de precauţie: *verificarea.* Aceasta m-ar scuti de ruşinea de a fi proclamat un rezultat fals, înlocuind x cu 2 în ecuaţie, trebuie să obţin o egalitate, în acest caz verificarea reprezentând un succes: $2x2+3 = 7$. Corect. Deci 2 chiar este un număr care satisface constrângerea fixată, este soluţia ecuaţiei.

— *Care este diferenţa dintre algebră şi aritmetică?*

— Aritmetica este studiul numerelor naturale şi al fracţiilor, în timp ce algebra este disciplina matematică al cărei obiect de studiu este teoria ecuaţiilor. Grecii, experţi în geometrie şi aritmetică, nu au

ajuns atât de departe încât să creeze algebra. Această disciplină s-a născut pe malurile Tigrului, la Bagdad, la începutul secolului al IX-lea. Creatorul său, Mohamed al-Khwarizmi, un mare savant persan, a redactat *Kitab aljabr i al muqabala,* un „tratat de îndreptat oase şi de pus faţă în faţă”, adevărata temelie a noii discipline. Cuvântul *aljabr* a dat „algebră”, adoptat astăzi în toată lumea. Cât despre Al-Khwarizmi, numele său latinizat, Algorismus, a dat substantivul algoritm, folosit în informatică, termen care semnifică „procedură sistematică spre a rezolva o problemă”, cel mai adesea pentru a efectua un calcul.

Prima utilizare a algebrei a privit chestiuni de moşteniri, deseori foarte complicate, guvernate de reguli extrem de stricte. Ecuaţiile au fost instrumentul adecvat, care a permis determinarea părţilor atribuibile diverşilor urmaşi, în funcţie de instrucţiunile din testamentul defunctului.

— în algebră, întâlnim mai multe litere decât cifre, ceea ce este paradoxal totuşi.

Variabile, parametri, ce le diferenţiază?

— $2x+3=7$. Ce spune această ecuaţie? Produsul variabilei cu un prim număr, adunat cu un al doilea număr este egal cu un al treilea număr. Nu există vreun motiv pentru care cele trei numere implicate să fie egale, trebuie deci să le numesc diferit, *a, b, c.* Nu pe acestea încerc să le determin, ci necunoscuta *x.* Pot acum să descriu această ecuaţie în cuvinte, fără să mă agăţ de valorile numerice: produsul variabilei *x* cu un prim număr, pe care îl numesc *a: axx,* adunat cu un al doilea număr, pe care îl numesc b: *(axx+b),* trebuie să fie egal cu un al treilea număr, pe care îl numesc c: *(axx+b)=c.*

Această expresie este tot o ecuaţie, dar în care nu figurează nicio valoare numerică. De fapt, nu este o singură ecuaţie, ci o familie de ecuaţii, *a, b* şi *c* folosesc la a descrie „forma” ecuaţiei, ei sunt *parametrii,* ce permit scrierea ecuaţiei generale de gradul întâi.

Fiecare tripletă de numere *a, b, c* defineşte o ecuaţie particulară, 2, 3, 5

defineşte ecuaţia 2x+3=5. Să încercăm să rezolvăm ecuaţia generală: *axx+b=c, axx=b-c* şi x = c\

a

Pentru a elimina *b,* adun *-b* de fiecare parte: *axx+b-b=c-b,* care se poate scrie *axx=c-b.*

Pentru a elimina *a,* este suficient să împart cu *a* în ambii membri. Şi obţin, în sfârşit, ceea ce căutam: *x = b).* Ce interes am? Formula *x =*

a *a*

îmi permite să găsesc soluţia tuturor ecuaţiilor de gradul întâi.

Dacă ar fi fost x^2 în loc de x, am fi vorbit de ecuaţie de gradul al doilea. Gradul este exponentul cel mai mare ce figurează în ecuaţie.

Un alt exemplu: produsul dintre pătratul variabilei şi un număr, adunat cu produsul dintre o variabilă şi un al doilea număr, adunat cu un al treilea număr este egal cu un al patrulea număr. Deci, patru numere, *a, b, c, d* care permit scrierea formei generale a ecuaţiei de gradul al

doilea, $ax^2+bx+c = d$.

Descartes, care a fost atât filosof, cât şi matematician, a generalizat folosirea literelor în ecuaţii, el a ales ultimele litere ale alfabetului *x, y, z* pentru a reprezenta necunoscutele şi primele *a, b, c, d...* pentru parametri.

— *Cum procedează chinezii, care nu au alfabet?*

— Trebuie să recunosc că nu ştiu nimic despre asta. Ştiu însă cum proceda marele matematician Brahmagupta, când erau mai multe variabile. El a avut ideea de a utiliza culorile pentru a simboliza diferitele necunoscute prezente în ecuaţiile sale, negrul pentru a doua necunoscută, albastrul pentru a treia, apoi galbenul, albul şi roşul.

— *O algebră multicoloră! Nu cumva este un poem al lui Rimbaud care face acelaşi lucru cu vocalele?*

— Da, face. îl ştii? Hai spune!

— *Nu-mi mai aduc aminte.*

— *A, negru... E alb.*

— *Da, da, I roşu, O albastru, U verde.*

— Şi-am terminat. Se vorbeşte deseori

despre *limbajul algebric.* Unele expresii separate de + sau – sunt asimilate unor cuvinte: Sxy^2. Acestea sunt *monoame.*

Cât despre şirurile de monoame separate de + sau –, acestea sunt asimilate unor propoziţii, ele sunt *polinoame.* Limbajul algebric are nevoie de puţine semne, de doar trei tipuri. Numere cunoscute, 2, —; litere, *a, b, x, y…*, reprezentând numerele, apoi semnele: =, >, <, în fine, semnele celor patru operaţii, +, x, –, /, exponenţii, pătratul, cubul, şi semnul rădăcinilor pătrate, .

Ah, eram pe cale să uit un semn foarte important, parantezele! Ele vin în perechi, una deschisă „(», şi una închisă: «)”. Sunt veritabile semne de punctuaţie, care folosesc la gruparea anumitor termeni consecutivi ce trebuie consideraţi ca un întreg. De exemplu, scriu *a+bxc.* Ce ar putea însemna aceasta? Să fie oare suma dintre *a* şi produsul *bxc* sau produsul dintre *a+b* şi c? Aşa cum este, scrierea nu permite vreo distincţie, este ambiguă. Deci, trebuie proscrisă categoric, în

8

matematică o expresie nu trebuie să aibă două semnificaţii diferite. Trebuie, aşadar, inventate semne care vor înlătura ambiguitatea: parantezele sunt aceste semne. Cum vor permite ele ieşirea din acest impas? Dacă avem intenţia de a vorbi despre suma dintre a şi produsul bxc, scriem a+(bxc). Dacă avem intenţia de a vorbi despre produsul dintre $a+b$ şi c, scriem $(a+b)xc$. Parantezele au eliminat ambiguitatea!

— De ce toate ecuaţiile sunt egale cu 0 şi nu cu 2 sau 3,14?

— Pentru început, aş vrea să-ţi reamintesc faptul că o ecuaţie nu este egală cu nimic. O ecuaţie este o ecuaţie şi atât. Ceea ce mă întrebi este de ce membrul al doilea al ecuaţiei este deseori egal cu 0. Oricare ar fi o egalitate $a = b$,o putem transforma într-o nouă egalitate, al cărei membru din dreapta este nul. $a = b$, $a-b = b-b = 0$.

$a = b$ este echivalent cu $a-b = 0$.

— Putem face acest lucru, dar de ce l-am face?

— Chiar aşa, noi nu facem întocmai tot

ceea ce am putea face. De ce este rentabil? Să reluăm ecuaţia de gradul întâi pe care o reprezentasem sub forma *ax+b = c,* cu trei parametri deci. Să o transformăm, *ax+b-c = c-c,* deci *ax+b-c* = 0. *(b-c)* fiind un număr, îl reprezint prin parametrul *d.* Ecuaţia devine *ax+d* = 0, având al doilea membru nul şi doar doi parametri. Am găsit o formă generală simplificată. Ecuaţia este mai simplă şi la fel de generală ca şi cea precedentă. Acest lucru este adevărat pentru toate ecuaţiile.

— *Afactoriza, a dezvolta, în algebră ni se cere să facem fără încetare acestea...*

— Un factor este „cel care multiplică”. De aceea, în matematică, vorbim despre produs de factori şi nu de sume de factori. Când ni se cere *săfac- torizăm* o expresie matematică, aceasta înseamnă că dorim să transformăm o sumă în produs. Dacă ni se cere să o *dezvoltăm,* este acţiunea inversă: dorim să transformăm produsele în sume.

$(a+b)x(a-b)=a^2-b^2$

Citită de la stânga la dreapta, această

identitate remarcabilă este o dezvoltare, un produs transformat în sumă. Citită de la dreapta la stânga, este o factorizare, o sumă transformată în produs.

Şi mereu aceeaşi predispoziţie pentru produse relativ la sume. De ce sunt apreciate? Deoarece ne permit *simplificări.* Un exemplu: $axb=b^2+bxc$, factorizăm: $axb=bx(b+c)$. Simplificăm $a=b+c$.

Recunoaşte că acest lucru nu se vedea în prima scriere.

A face exerciţii de algebră înseamnă, totodată, a face curat şi a toca mărunt. Dăm peste cap expresiile, pentru a le transforma în alte expresii, echivalente, a căror formă ne convine, deoarece dispunem de informaţii asupra lor, furnizate de enunţ sau apărute pe parcursul problemei.

Regula de aur: a schimba forma fără a schimba valoarea. Cea mai mică schimbare a valorii conduce la o eroare!

Deseori, unele lucruri pe care le facem în matematică par stupide.

— *Ah, recunoşti. Felicitări pentru*

luciditate.

— Aşteaptă sfârşitul înainte de a striga victorie. Atunci când avem o expresie *A* şi decidem transformarea sa în A+2-2, unui neavenit în matematică i se poate părea stupid acest lucru: la ce foloseşte să aduni 2 dacă îl scazi imediat după aceea? Ei bine, foloseşte!

Singurele transformări pe care avem dreptul să le efectuăm asupra unei expresii sunt cele care îi modifică forma fără a-i schimba „valoarea”.

în consecinţă, o mare parte a muncii depuse în domeniul algebrei constă în a porni de la o expresie A şi a o înlocui cu o suită de expresii egale, până la obţinerea uneia care ne convine.

— Problemele de geometrie sunt, deseori, dificile si nu eşti tu cea care mă va contrazice.

— O, *nu! Niciodată nu reuşesc să văd în spaţiu.*

— Pe parcursul secolului al XVII-lea, doi matematicieni francezi, René Descartes şi Pierre Fermât, au avut, independent unul de celălalt, ideea de a vorbi despre obiectele geometrice folosind limbajul algebric. Această idee a revoluţionat matematica. S-a născut o nouă disciplină, *geometria analitică,* care s-a instalat alături de aritmetică, de geometrie, de trigonometrie şi de algebră, lărgind şi mai mult universul matematic. Graţie noii discipline, în loc de a acţiona direct asupra obiectelor geometrice, se acţionează asupra

expresiilor algebrice, infinit mai uşor de manipulat. Este un exemplu suplimentar al legăturilor ţesute între spaţiu şi numere, între geometrie şi algebră. A trata problemele de geome-

trie prin metode algebrice permite dispunerea de toate tehnicile de calcul din algebră puse în slujba geometriei.

Precum ştii, punctul este cel mai simplu obiect al geometriei, este obiectul elementar, fiecare obiect geometric fiind constituit din puncte şi numai din puncte. Am putea spune şi că, dacă voi cunoaşte „toate” punctele unei figuri, voi cunoaşte figura însăşi. Trebuie deci să încep prin numirea acestora, folosind un procedeu sistematic pentru atribuirea numelor lor. Pentru aceasta, este necesară definirea unui *reper,* cu alte cuvinte, a unui dispozitiv care permite localizarea şi numirea tuturor elementelor dintr-o mulţime

>

dată, fără ambiguităţi.

Facem acest lucru în mod constant în matematică (şi în afara ei): *a da un nume obiectelor pentru a putea vorbi despre ele.* Putem chiar să dăm nume unor obiecte pe care încă nu le cunoaştem: de exemplu fie *G* un punct situat la distanţă egală de trei puncte *A, B* şi C date în plan. Dacă nu cunoaştem răspunsul, există

două întrebări: există oare un asemenea punct? Dacă da, cum îl putem găsi? Atâta timp cât nu am răspuns la aceste două întrebări, punctul *G* este necunoscut, dar, totuşi, a fost numit, spre a se putea vorbi despre el.

Este, ca atare, util să foloseşti drept reper alte obiecte deja cunoscute: cutare stradă, cutare monument, în viaţa cotidiană, dar, de asemenea, în geometrie: fie *H* piciorul perpendicularei, fie *K* intersecţia dreptelor *D* şi *D'* etc.

Acesta este punctul de plecare al ideii lui Descartes şi Fermat: a încerca asocierea numelor „numerice”, a numerelor, cu nişte puncte „geometrice”!

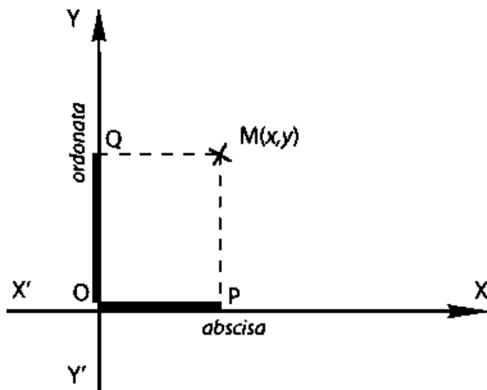
Superbă idee, care ar permite, în caz de reuşită, utilizarea tuturor resurselor calculului şi algebrei, ce reprezintă o maşinărie foarte sistematică, şi apelul rar la intuiţie, contrar geometriei. A încerca schimbarea cadrului, spre a fi mai eficace! Aceasta este frumuseţea proiectului.

în geometrie, a numi un punct înseamnă a-l situa. Şi pentru a situa ceva, este nevoie de un reper.

Fiecărui punct îi vom atribui numele locului pe care îl ocupă.

De exemplu, dacă spun: „sunt pe Autostrada Sud, la 30 de Lyon”, este extrem de insuficient: la 30 de ce? metri, kilometri? Şi în ce direcţie, spre Paris, spre Marseille? Pe de altă parte, dacă precizez originea (Lyon), direcţia (Marseille) şi unitatea (km), nu mai există vreo ambiguitate, ştiu unde mă aflu, chiar dacă autostrada nu este... o dreaptă geometrică.

Din aceleaşi motive, dacă un punct este pe o dreaptă, va trebui fixat un punct *O* al dreptei ca *origine,* o direcţie (dreapta va fi *orientată)* şi o unitate de lungime *(unitate),* pentru a nu fi nici o ambiguitate: numele „numeric” al unui punct *M* va fi valoarea algebrică a măsurii segmentului x=[OM].



Dacă ne aflăm pe o dreaptă, un punct va fi reprezentat printr-un singur număr; intr-un plan, două numere; în spaţiu, trei. Motivul? Dreapta are o singură dimensiune, planul două, spaţiul trei.

Al doilea univers, planul. Reperul este definit prin două axe orientate, *XX'* şi *YY',* care se întretaie în O, care este originea sistemului de coordonate. în plus, pe fiecare axă se defineşte o distantă unitate.

Când cele două axe sunt perpendiculare, se afirmă că reperul este *ortogonal.* Dacă, în plus, unităţile au aceeaşi lungime, reperul este *orto-normat.*

Proiectând punctul *M* respectiv pe cele două axe, obţinem două segmente *OP* şi OQ, ale căror măsuri algebrice furnizează numerele *x* şi *y,* care sunt *coordonatele* lui *M. x* este abscisa, *y* ordonata. Iar *M* va fi numit cu perechea de numere *(x,y).* Pentru un matematician, cel mai adesea, un punct din plan este o pereche de numere. Drept omagiu lui Descartes, coordonatele sunt numite *coordonate carteziene.*

S-ar fi putut proceda şi altfel, de exemplu dân- du-se o singură axă orientată, având originea O şi definind punctul *M* prin distanţa sa *d* faţă de originea *O* şi unghiul 0 dintre vectorii *Ox* şi *OM.* Se vorbeşte în acest caz despre *coordonate polare.* Vei observa că totuşi avem nevoie de două numere, *x* şi}' în primul caz, *d* şi 0 în cel de-al doilea.

— Exact ceea ce se întâmplă pe o hartă geografică, latitudine, longitudine. Longitudinea este abscisa, latitudinea ordonata. Axa ordonatelor este meridianul Greenwich, meridianul O, iar axa absciselor este ecuatorul.

— Singura diferenţă este că planul

este... plan, în timp ce harta geografică, precum şi globul pământesc care se vrea reprezentat pe hartă sunt mai degrabă sferice. De aceea, pe glob, distanţele nu se evaluează în kilometri, ci în grade, 360° pentru longitudini şi 180° pentru latitudini.

— *Mereu dreapta, planul şi curba!*

— Exact, sunt mereu în centrul matematicii.

Toată această construcţie de repere foloseşte în principal la reprezentarea de *funcţii.* în viaţa cotidiană, întâlnim adesea expresiile „a depinde de”, „a rezulta din”, „a fi în funcţie de”. Uneori, studiind anumite fenomene, remarcăm faptul că variaţiile unuia provoacă variaţiile celuilalt: viteza şi distanţa, greutatea şi înălţimea, preţul unei legume şi greutatea sa etc. Desigur, încercăm să cunoaştem mai în detaliu legătura care uneşte cele două fenomene, sperând să o putem formula matematic.

La sfârşitul secolului al XVII-lea, Leibniz scria, în unul din textele sale, *„x este funcţie de y”.* Cu vreo douăzeci de ani mai târziu, Jean Bernoulli foloseşte

notaţia *fx,* „funcţie de o cantitate variabilă x”. Notaţia s-a păstrat. S-au născut noi entităţi matematice, *funcţiile,* al căror studiu este o parte importantă a matematicii. Eficacitatea matematicii în studiul funcţiilor explică, în mare măsură, succesele sale atunci când este aplicată în alte discipline, în particular în fizică şi astronomie.

în electricitate de exemplu: într-un circuit electric, legătura care uneşte tensiunea electrică *U* de intensitatea curentului care îl traversează, *I,* este exprimată prin funcţia *U=IxR, R* fiind rezistenta electrică.

Iată funcţia f(x)=2x+5. O pot considera o maşină dotată cu o intrare şi cu o ieşire. Inserez numărul 1, maşina macină, multiplică 1 cu 2, adună 5 şi scoate afară rezultatul: *y=7.* O anumită scriere îmi permite să rezum această acţiune a funcţiei: perechea (1, 7), al cărei prim termen este numărul inserat, iar al doilea este cel produs. Aceasta exprimă ceea ce tocmai a dus la bun sfârşit maşina-funcţie.

Continuăm prin introducerea

numerelor 0, -l, ~. Obţinem perechile (0>5), (-l,3), 6).

Fiecare

dintre ele poate fi considerat ca nume al unui punct din plan. Altfel spus, maşina [2x+5] produce toate punctele din plan a căror ordonată este dublul abscisei adunat cu 5. Toate aceste puncte se află pe o dreaptă, pe care, în mod natural, o voi numi dreapta *y* = 2x+5. Ba, mai mult, pot afirma că toate punctele a căror ordonată este dublul abscisei plus 5 se găsesc pe această dreaptă.

Funcţie, curbă, ecuaţie, trei termeni pe care îi întâlnim deseori legaţi: *ecuaţia* unei curbe, *curba reprezentativă* a unei *funcţii.*

— *Nu cumva aflăm aici un pic de etimologie?*

— Exact. *Repraesentare,* a face să fie prezent, *graphein,* a scrie. A reprezenta înseamnă a face să fie ceva prezent. Vom putea deci VEDEA această funcţie sub forma sa algebrică!

Acesta este rolul reprezentării grafice: a oferi o „imagine” a funcţiei.

Ecuaţia unei curbe funcţionează precum un dispozitiv ce permite generarea, după bunul plac, a numelui fiecăruia dintre punctele curbei.

— *Ce înseamnă „a verifica o ecuaţie”?*

— Punctul *A* (1,7) verifică ecuaţia *f(x) = y =* 2x+5, deoarece înlocuind *x* cu 1 şi *y* cu 7, obţinem egalitatea 2x1+5 = 7. A se află deci pe curba reprezentativă a funcţiei *f(x) = 2x+5.*

Ai impresia că vorbesc fără sens?

— *Nu, că te repeţi. Dacă am înţeles bine, eşti pe punctul de a-mi spune acelaşi lucru în moduri diferite.*

— Spun chiar mai mult, cunoaşterea ecuaţiei permite cunoaşterea tuturor proprietăţilor geometrice ale curbei. Ce se observă dintr-o simplă privire aruncată asupra unei curbe? 1. în punctele unde este cel mai sus, ea se opreşte din crescut spre a descreşte *(punctele de maxim),* iar în cele în care este cel mai jos, se opreşte din scăzut spre a creşte *(punctele de minim). 2. Punctele de inflexiune* sunt cele în care curba îşi schimbă curbura, trecând de la o deschidere spre partea de sus la o deschidere spre partea de jos. Şi

multe alte lucruri, precum *tangentele, punctele de intersecţie,* în care taie axele *XX'* şi *YY'.* Putem, de asemenea, cataloga dreptele raportate la alte drepte, paralelele, secante etc.

în anumite cazuri, simpla „vedere” a ecuaţiei ne permite să anunţăm care va fi forma curbei reprezentative. Astfel, toate funcţiile de gradul întâi, $f(x) = ax+b$, sunt reprezentate prin drepte, cele de gradul al doilea, $y = ax^2+bx+c$, cu *a, b, c* numere şi *a*0,* prin parabole. Se precizează *a*0,* deoarece dacă *a=Q,* funcţia se reduce la}/ = *bx+c,* care este reprezentată, după cum tocmai am văzut, de o dreaptă.

Această dreaptă, această parabolă cum se obţin? în mod obişnuit, sunt trasate dintr-o mişcare

continuă, dar nu acesta este modul în care ele capătă efectiv o formă. De fapt, ele sunt produse punct cu punct, o intrare, un număr, o ieşire un număr. Două numere, deci un punct. Precum pe ecranul televizorului, pe care imaginea nu este „pictată” pe suprafaţă, ci constituită din puncte a căror aglomerare „formează” imaginea. Suntem mai degrabă în sfera broderiei decât a picturii. Această imagine este *graficul* funcţiei.

— *De câte puncte este nevoie pentru a construi acest grafic al funcţiei?*

— Atâtea câte numere se dau drept intrare.

— *Da, şi câte numere se dau drept intrare?*

— Bună întrebare. Trebuie precizat. Mulţimea numerelor date drept intrare trebuie, în mod obligatoriu, să apară în definirea funcţiei, este *domeniul de definiţie.*

Insist, două funcţii care au aceeaşi ecuaţie şi domenii de definiţie diferite sunt diferite. Pentru a te convinge, funcţia/(x) = 2x+5, al cărei domeniu de definiţie este numărul 0, şi funcţia *g(x) =*

2x+5, al cărei domeniu de definiţie este mulţimea tuturor numerelor, sunt diferite. Graficul primei funcţii este redus la un punct, punctul (0,5); graficul celei de-a doua este o dreaptă! Nu este acelaşi lucru...

Problemele

— *Deseori, înţeleg teoria, dar nu sunt capabilă să rezolv problemele.*

— Ţi se întâmplă ca, dimpotrivă, să rezolvi problemele fără a fi înţeles teoria?

— *Ei...*

— „Ei” înseamnă nu?

— *Da.*

— Problemele care ţi se propun sunt o aplicare a teoriei. Sunt mereu legate de acea ramură a matematicii pe care o tratează cursul pe care îl parcurgi. Cu excepţia problemelor de sfârşit de an care pot face apel la întreaga programă. Când propune o problemă, ce încearcă să facă profesorul? Pe de o parte, să se asigure că ştii teoria, pe de altă parte, să evalueze aptitudinea ta de a o pune în practică.

— De unde îşi găsesc profesorii problemele?

— Din lucrări de specialitate, dar, deseori, le construiesc ei înşişi, în funcţie de conţinutul cursului lor şi mereu în aşa fel încât să le poţi rezolva doar cu ceea ce ai învăţat de la curs. Cu alte cuvinte, în principiu, dispui de tot ce ai nevoie pentru a te descurca.

Ţi se pune la dispoziţie cutia cu unelte, de tine depinde să ştii să le foloseşti.

Aproape toate problemele sunt construite pe acelaşi tipar. încep cu un text ce prezintă situaţia, „datele”. Acestea „schiţează cadrul”, indicând: l.unde ne situăm, în ce zonă a matematicii are loc „povestea”; 2.care sunt diverşii actori matematici, un triunghi dreptunghic, fracţii etc., şi legăturile pe care le întreţin pe parcursul poveştii.

Problemele se termină cu o serie de întrebări, puse într-o anumită ordine. Trebuie mereu să-ţi aminteşti că termenii prezentării au fost special aleşi pentru ca fiecare dintre ei să ofere o informaţie de care vei avea nevoie spre a răspunde la întrebările adresate. în faţa fiecărei informaţii, trebuie să te întrebi: de ce mi-o dă profesorul, ce vrea să îmi spună? Ce

mesaj vrea să-mi transmită? Decodarea acestor mesaje constituie o parte importantă a muncii tale. Ca regulă generală, nu ţi se dau mai multe date decât îţi sunt necesare.

Ceea ce înseamnă că, pentru a rezolva problema, trebuie să le foloseşti pe toate. Iar dacă, fapt extraordinar, ai rezolvat toată problema fără a fi avut nevoie de una dintre date, fie eşti genială, fie ai greşit undeva.

Iată o problemă care începe cu „fie *ABC* un triunghi isoscel”. Scriind această propoziţie, profesorul ţi-a transmis o informaţie pe care o decodezi instantaneu. Isoscel: două laturi egale, două unghiuri egale. încă de la început, dispui de două egalităţi pe care – evident – te grăbeşti să le notezi pe o foaie specială, *foaia cu cunoştinţe.* Dacă profesorul a mai spus şi „isoscel în vârful A”, cel de-al doilea mesaj îţi permite să ştii că laturile AB şi AC sunt cele egale, iar unghiurile B şi C sunt, de asemenea, egale; dar, deopotrivă, că înălţimea *AH* este şi bisectoare, mediană şi mediatoare, şi că *AH* este o axă de simetrie a

triunghiului. Adaugi aceste informaţii pe foaia de cunoştinţe, ele vor constitui resursa ta pentru rezolvarea problemei.

Şi întrebările? Ele sunt puse în funcţie de date, iar ordinea în care acestea apar nu este arbitrară. Pentru a răspunde la una dintre ele, trebuie deseori utilizate răspunsurile la cele precedente. Dar, uneori, unele sunt independente, li se poate da un răspuns fără a fi aflat precedentele.

De unde se începe rezolvarea unei probleme? Munca ta va consta în a pune faţă în faţă ceea ce se cere şi ceea ce ştii deja. Şi a încerca trecerea de la a doua la prima: prin ce mă va ajuta ceea ce ştiu în a da un răspuns la întrebare?

Vei fi nevoită uneori să „traduci” în scriere matematică termenii ce figurează în întrebare, adică să înlocuieşti numele obiectelor cu definiţiile lor.

Toate teoremele predate la curs sunt disponibile, inclusiv cele predate în anii anteriori! Dar, evident, nu toate se aplică la problema ta. Trebuie să le găseşti pe cele care i se potrivesc. Aceasta este prima ta sarcină, să găseşti teorema care

s-ar putea aplica problemei tale. Ce înseamnă *a aplica*i „A pune un lucru peste alt lucru, astfel încât să îl acopere şi să adere la el”, precum spune dicţionarul.

încearcă să-ţi imaginezi două piese mecanice. Deţii una şi trebuie să o găseşti pe cea care i se adaptează perfect. A demonstra că teorema se adaptează este cea de-a doua ta sarcină. După ce ai demonstrat acest lucru, o aplici. Şi ea va fi cea care va duce greul. Concluzia teoremei îţi este în prezent la îndemână. O poţi adăuga la foaia de cunoştinţe.

Atunci când situaţia de început este scrisă în limbaj curent, ca o povestire în franceză, trebuie întâi să înţelegem ce ne povesteşte. Abia atunci poate începe munca de traducere a acestei povestiri în limbaj matematic. Este o muncă destul de subtilă. Deseori este partea cea mai dificilă, deoarece nicio formulă nu este capabilă să facă acest lucru.

Abia plecând de la această transcriere în limbaj matematic, ecuaţii, figuri, numere, egalităţi, inegalităţi, funcţii, se intră în sfera matematicii.

Multe probleme sunt, de fapt, întrebări

care vor fi abordate la cursul din anul următor. Eşti pusă să demonstrezi o teoremă prea dificilă pentru nivelul tău. Dar îţi va fi prezentată fragmentată de întrebări, care sunt tot atâtea trepte ce îţi vor permite să urci tot mai sus fără mari greutăţi.

— O *scară!*

— Exact, problema este construită ca o scară care facilitează urcarea, în loc de a merge dintr- un pas la concluzie, ajungi la ea treaptă cu treaptă. în trecerea prin şcoală, rezultatele dobândite în anii precedenţi nu devin învechite. O elevă de clasa a 9-a se presupune că ştie tot ce a învăţat în anii precedenţi.

— *Există probleme proaste?*

— Ce înseamnă o problemă bună de matematică? Aceasta este o problemă în sine! Ipoteze bune, întrebări bune. Unele ipoteze nu sunt „fertile”, nu creşte nimic interesant pe terenul lor, doar bălării.

Unul dintre talentele matematicienilor este acela de a „simţi” care sunt ipotezele bune. Ei sunt ca nişte buni bucătari, care simt ce ingrediente, ce cărnuri, ce legume, ce condimente trebuie asociate

pentru a face o mâncare delicioasă.

— *Cu toate cunoştinţele tale gastronomice, păcat că nu ne faci mai des de mâncare!*

— Să revenim la alte mâncăruri. Când lucrăm cu un obiect, este utilă cunoaşterea sa sub diferite forme, după cum şi diversele sale proprietăţi.

— *Cum vine asta, „sub diferite forme”?*

— O dreaptă. Geometric, este o linie trasată. Poate fi definită prin două dintre punctele sale sau prin intersecţia a două plane neparalele şi prin multe alte proprietăţi. Algebric, poate fi definită prin ecuaţia sa, $y = ax+b$. Aceasta permite schimbarea cadrului: unele probleme de geometrie, de exemplu, sunt mai uşor de rezolvat în forma algebrică echivalentă. Te-ai putea distra căutând singură diferite formulări ale obiectelor pe care le cunoşti.

— *Proprietăţile sunt un atu?*

— Absolut, Lola, un atu pentru matematician şi pentru elevi. O proprietate este o informaţie.

Cu cât este mai general un obiect, cu atât are mai puţine proprietăţi şi avem mai puţine informaţii despre el, deci mai puţine „abordări” posibile. A lucra asupra unui obiect oarecare este dificil, deoarece nu ne putem baza pe mare lucru. De aceea, în probleme şi, de asemenea, în teoreme se atribuie proprietăţi obiectului spre a-l îmbogăţi. Decât să facem o problemă cu un triunghi scalen, mai bine precizăm că este dreptunghic, de exemplu. Putem spune mai multe lucruri referitoare la un triunghi dreptunghic decât referitoare la cel scalen. Din simplul motiv că tot ceea ce este adevărat pentru un triunghi scalen este adevărat şi pentru un triunghi dreptunghic, dar nu si invers!

înainte de a ne arunca cu capul înainte la prima întrebare a problemei, este mai bine să citim enunţul în totalitate, pentru a vedea încotro vrea să ne ducă. De altfel, nu este important să înţelegem totul din prima, deşi acest lucru ne ajută şi poate da idei de rezolvare. Pe de altă parte, anumite întrebări pot chiar să lămurească sensul întrebărilor precedente.

— *Ce este o demonstraţie?*

— Este un drum care merge de la situaţia de început, *ipoteza,* la cea de sfârşit, la rezultat, la concluzie. Cuvintele o spun foarte bine. *Hypo,* „dedesubt”, *thesis,* „a pune”, ipoteza pune situaţia de dedesubt, de bază. Cât despre concluzie, de la *conclusio,* acţiunea de a închide, ea încheie demonstraţia.

O demonstraţie se îndreaptă spre concluzie, luând-o pe un drum format dintr-o serie de „argumente”, dintre care fiecare este consecinţa celui precedent şi cauză pentru cel ulterior. Cursul de matematică este o rezervă preţioasă de argumente, de rezultate, de teoreme, printre care poţi înota după bunul plac (!) pentru a rezolva problemele care îţi sunt

puse. De unde şi necesitatea absolută de a cunoaşte teoria.

>

— De ce sunt atât de importante demonstraţiile? Am putea să ne debara... vreau să spun, să trecem peste ele?

— Nu. Demonstraţia este metoda pe care o deţine matematica pentru a dovedi un lucru. Atunci când se enunţă o afirmaţie, se pune, mai devreme sau mai târziu, problema deţinerii unei metode de a se asigura de veridicitatea sau falsitatea acesteia. Cu alte cuvinte, trebuie construită o *dovadă.* O dovadă este un argument convingător, care determină adeziunea. Problema dovezii este o problemă capitală pentru oameni, în fiecare epocă istorică, iar tipul de dovezi ce pot fi aduse este diferit în funcţie de domeniile în care se

aplică: dovezile din medicină nu sunt de aceeaşi natură ca şi cele solicitate în drept.

Matematica se dedă la stabilirea de adevăruri privitoare la familii de obiecte, cel mai adesea infinite, şi nu la obiecte particulare. Desigur, ne- ar plăcea să credem că este posibilă demonstrarea unui rezultat prin verificarea validităţii

sale printr-un exemplu numeric. Or, fiecare situaţie numerică fiind unică, tot ceea ce am putea spune despre aceasta nu are valoare decât pentru aceasta şi, deci, nu poate fi generalizat. Exemplele numerice, sau desene în geometrie, ne pot da idei despre soluţie, ne pot sugera anumite piste, ne pot ajuta la construirea unei demonstraţii, dar nu pot fi considerate dovezi valabile. Există totuşi o situaţie în care un exemplu negativ poate stabili un rezultat, dar un rezultat negativ! Dacă o proprietate nu se verifică într-un caz particular, nu este valabilă în cazul general. Este ceea ce se numeşte un *contra-exemplu,* singurul caz în care se trece de la particular la general.

Pe de o parte, nicio situţie particulară nu are forţa de a stabili tipul de rezultat general căutat. Pe de altă parte, obiectele vizate de rezultatul pe care încercăm să-l stabilim fiind în cantitate infinită, este zadarnic gândul că le-am putea analiza unul câte unul.

— *Atunci?*

— Atunci? Trebuie conceput un nou instrument capabil să ia în considerare

trăsăturile generale ale obiectelor, bazându-se doar pe ceea ce este comun tuturor. Acest instrument este *demonstraţia.* Fără îndoială, cea mai frumoasă creaţie a gânditorilor greci.

în secolul al V-lea înaintea erei noastre, grecii au inventat un sistem politic inedit în Occident, democraţia, de la *dernos:* „popor”, conducere a poporului. Se proclamă faptul că suveranitatea provine de la popor, nu de la un rege, nici de la un conducător militar, nici de la un mare preot, nici de la Dumnezeu, ci de la cetăţeni. în diversele sfere ale societăţii sunt puse în practică metode diferite. în sfera juridicului, pe parcursul proceselor, publice, trebuie aduse dovezi ale vinovăţiei sau nevinovăţiei acuzatului, dacă se poate, dovezi irefutabile, trebuie stabilite faptele, este nevoie de argumentare. Cele două părţi se opun pe parcursul unui schimb de argumente.

în sfera politicului, cei ce aspiră la a deţine o funcţie de conducere trebuie să se prezinte în faţa adunărilor de cetăţeni, spre a-i convinge de aptitudinile lor, încercând să demonstreze că sunt cei mai

buni pentru a conduce cetatea. Era, în principiu, sfârşitul arbitrariului, sfârşitul apelului la autoritate care proclama „Este adevărat pentru că aşa spun eu”.

Un fenomen asemănător a revoluţionat matematica în aceeaşi epocă: necesitatea de a aduce dovezi în sprijinul a ceea ce se enunţă, obligativitatea justificării. într-un cuvânt, nevoia de a demonstra. Nu mai este suficient să spui ceea ce ai descoperit, trebuie şi explicat celorlalţi oameni de ce este adevărat. Mai ales prin folosirea demonstraţiei, matematica greacă s-a distins de matematica babiloniană, egipteană sau chineză, ea datorându-şi, astfel, puterea extraordinară demonstraţiei. Matematica pe care o învăţăm la şcoală şi universitate, cea pe care o practică astăzi toţi matematicienii din lume este moştenitoarea directă a matematicii greceşti inventate în Antichitate. O demonstraţie este, aşadar, o dovadă, un tip particular de dovadă, proprie matematicii.

— *Cum se proceda înainte?*

— Se mulţumeau cu enunţarea rezultatelor obţinute, fără a spune cum au

fost obţinute.

— *Matematica avea, să înţeleg, o altă faţă atunci?*

— O, da! Matematica chineză, de exemplu, care era foarte evoluată, nu avea totuşi teoreme; aceasta funcţiona pe principii complet diferite.

— *Cum, nu au existat dintotdeauna teoreme?*

— Nu! încă odată, gânditorii greci au inovat, ei au dat naştere ideii de teoremă: enunţ demonstrat matematic. O teoremă este compusă din două părţi, începe cu *ipotezele,* care explicitează situaţia de început, şi se termină cu *concluzia:* o afirmaţie matematică. Cea la care dorim să ajungem şi pe care ne străduim să o demonstrăm. Ştii de unde vine cuvântul? *Theorein* înseamnă „contemplare” în greacă.

— *De aceea se spune deseori despre matematicieni că sunt cu capul în nori?*

— Chiar vrei un răspuns?

— *Nu.*

— Mulţumesc. Cum ar trebui înţeles ceea ce ne spune o teoremă? Spune: dacă

ipotezele sunt verificate, cu alte cuvinte, dacă sunt adevărate, concluzia este adevărată. Insist, teorema nu spune: „concluzia este adevărată”, ci „concluzia este adevărată dacă ipotezele sunt adevărate”. Astfel, într-o teoremă, ceea ce este adevărat nu este concluzia luată deoparte, ci cuplul ipoteză-conclu- zie. Oricum, aproape nimic nu este adevărat în orice fel de condiţii!

— *Dar 2+2 = 4?*

— Este valabil şi pentru 2+2 = 4. în baza 3, de exemplu, nu putem scrie 2+2 = 4. Pentru simplul fapt că 4 nu există în baza 3. Această bază foloseşte doar trei cifre: 0,1 şi 2, după cum baza 2 foloseşte două, iar sistemul zecimal, zece. în baza 3, 2+2 = 11! Deoarece 2+2 = 1x3+1, deci 11. Cumva nu este clar? în baza zece, ce cantitate reprezintă 11? Zece şi o unitate. în baza 3,11 reprezintă „un trei” şi o unitate: 3+1.

Lola rămase blocată. Apoi, în sfârşit, rosti:

— *Dacă 2+2 nu mai este egal cu 4, totul se clatină în jurul meu!*

— Dacă nimic nu este adevărat în toate condiţiile, nu înseamnă că totul este mereu fals. O teoremă este mereu urmată de demonstraţia sa, adică de dovada că ceea ce afirmă este adevărat; este, într-o oarecare măsură, certificatul său de validare. Dacă în matematică nimic nu este adevărat în toate condiţiile, ceea ce este adevărat rămâne mereu adevărat.

De felul cum este demonstrată, o teoremă intră în domeniul public şi aparţine patrimoniului matematic comun. Toată lumea poate, din acel moment, să o folosească. Nu există certificate de proprietate în matematică. Adevărurile matematice sunt neperisabile, nu putrezesc cu timpul. Dacă soliciţi o teoremă, îţi va fi livrată cu un certificat de garanţie pentru eternitate. Matematica este singura companie umană care îţi poate oferi o asemenea garanţie.

— *Ei bine, pe mine acest lucru nu mă asigură de nimic. Adevărat pentru totdeauna, îţi dai seama? Este dezamăgitor. Nimic din ceea ce vom face nu va putea schimba un adevăr matematic, asta e ceea ce vrei să îmi*

spui?

Se lăsă liniştea. Ray îşi dădu seama de efectul pe care îl putea avea o asemenea declaraţie asupra unei tinere fete... care avea viaţa înainte. El vru să-i spună că matematica era – de asemenea – un tărâm al libertăţii, după cum declarase unul dintre cei mai mari matematicieni, Georg Cantor: esenţa matematicii este libertatea. Ar fi vrut să spună că nu trebuie să te „închini” în faţa adevărurilor matematice, ci trebuie să afli cum au luat naştere, ce justificare au, cum fac corp comun cu celelalte adevăruri. Să-i spună că el însuşi nu era nemulţumit de faptul că există anumite aserţiuni stabile, intangibile, pe care te poţi sprijini. Da, asta era, adevăruri pe care se putea sprijini.

Ultima frază îi scăpase. Lola o prinse din zbor:

— *Eu nu m-am sprijinit niciodată pe teoreme, ele m-au zăpăcit, mai degrabă, şi încă bine de tot. Şi-apoi de ce trebuie să le învăţăm pe de rost?*

— Nu trebuie să le învăţăm pe de rost, trebuie să le înţelegem în adâncul lor. Să

le cuprindem cu gândirea sensul profund: o teoremă duce la bun sfârşit o muncă, este un *cărăuş* care permite trecerea de la o aserţiune matematică la o alta, în mod direct. Iată ce ne declară: dacă dispun de acestea (ipotezele), atunci sunt sigur că dispun de aceasta (concluzia).

Dar, atenţie, o înţelegere adâncă înseamnă şi că trebuie să le cunoaştem cuvânt cu cuvânt. Fie-
J
care cuvânt din enunţ este necesar, dacă omiti unul, devine fals, dacă modifici unul, devine fals din nou. Iar teorema nu mai este teoremă.

— De *ce nu spui direct, teorema devine falsă?*

— O teoremă este o propoziţie adevărată. Deci o teoremă falsă ar fi... o propoziţie adevărată care ar fi falsă! Desigur, au existat în istoria matematicii teoreme despre care s-a observat mai târziu că ceea ce afirmau era fals.

— *Au fost totuşi demonstrate!*

- Da, dar demonstraţia era falsă! Aceasta s-a produs, destul de rar, trebuie spus, atunci când matematicianul uita să

menţioneze printre ipoteze o proprietate pe care o folosea totuşi, dar care nu era demonstrată. El se înşela! Atunci când
>
o teoremă este fixată, aceasta implică o dublă responsabilitate, cea a autorului, dar şi cea a comunităţii matematice care răspunde de această teoremă, care este responsabilă de justeţea rezultatelor stabilite în cadrul său. „Scoaterea pe piaţă” a unei teoreme nu este autorizată decât după aprobarea de către un juriu a tezei prezentate la universitate sau de către un comitet de lectură a unei gazete de specialitate.

Să luăm exemplul teoremei lui Pitagora. Se pare că egiptenii ştiau că triunghiul cu laturile 3, 4 şi 5 era dreptunghic, fapt confirmat de teorema lui Pitagora: chiar avem $3^2+4^2 = 5^2$, dar ceea ce afirmă teorema lui Pitagora este de altă natură decât ceea ce ştim despre triunghiul (3, 4, 5). Ea ne spune că: *într-un triunghi dreptunghic, pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor.* Este adevărat pentru toate triunghiurile dreptunghice şi nu doar

pentru cel cu laturile (3, 4, 5). Spre a fi mai precis, ar fi trebuit să mai adauge, ceea ce este subînţeles, că acest lucru nu este adevărat decât dacă triunghiul este plan. Este fals pentru un triunghi sferic, de exemplu.

Pentru a rezuma, dacă verificarea funcţionează într-un caz particular, nu există niciun motiv ca ea să funcţioneze în toate cazurile. Pe de altă parte, dacă există un caz în care nu se aplică, ea nu mai este valabilă în cazul general. Este una dintre cele mai frecvente erori de raţionament.

— *Ce alte tipuri de erori fac elevii?*

— Ştii de unde provine cuvântul „eroare”? De la cuvântul latin *error,* „a rătăci”, a fi pierdut. Când faci o greşeală, te abaţi de la „drumul adevărului” în demonstraţia ta şi te rătăceşti.

Erorile sunt numeroase şi de natură diferită. Unele se raportează la un domeniu particular, se referă la scriere, la propoziţii prost construite, îţi aminteşti? Altele se leagă de raţionament, în mod independent de domeniul în care sunt comise: erorile de logică.

— Ce este logica, până la urmă?

— Am putea spune că este ştiinţa care studiază regulile gândirii.

— Orice gând este logic? Şi poeţii au o logică deci?

— Ridici o problemă interesantă. Rectific, ar trebui spus: logica este domeniul gândirii raţionale. Aristotel, marele filosof atenian, a pus bazele ei. La origine, era parte a filosofici, astăzi, este o ramură a matematicii. Legea absolută care guvernează gândirea logică este *principiul non- contradicţiei:* o aserţiune şi contrara sa nu pot fi ambele adevărate. Nu putem afirma „un lucru ŞI contrariul său”.

Se respinge, de exemplu, ideea că două drepte se întretaie ŞI sunt paralele, sau că un număr impar este divizibil cu 2. A doua lege, cea a *terţului exclus,* afirmă că o propoziţie este fie adevărată, fie falsă, şi că, în aceste condiţii,nu există o a treia posibilitate. Dintre o aserţiune A şi contrara *(non* A), una dintre ele sigur este adevărată. Atunci, fie A, fie *(non* A) este adevărată. Dacă *(non* A) este adevărată, A este falsă. Şi dacă *(non* A) este falsă, *A*

este adevărată. Ceea ce implică faptul că dispunem mereu de două căi spre a demonstra o aserţiune A. Calea directă: a demonstra că *A* este adevărată şi calea indirectă: a demonstra că *(non* A) este falsă. Depinde de tine să alegi una sau alta, în funcţie de situaţie. Uneori, datele problemei au fost alese special pentru a nu putea rezolva problema decât pe calea indirectă.

— Logica se învaţă la liceu?

— Da, dar abia în ultimul an. Este păcat că nu se studiază mai devreme, ar trebui predată încă din clasa a 10-a, precum filosofía, de altfel.

— Matematica şifilosofia sunt legate, dar acest lucru nu se vede niciodată la curs.

— Da, la origine, erau strâns legate. Mulţi mari matematicieni erau filosofi şi mulţi mari filosofi erau matematicieni. Ne-am intersectat deja cu Descartes, Leibniz, Pitagora. Dacă nu se vorbeşte despre asta la curs, este pentru că programele sunt prost concepute. Şi nu mă pune să vorbesc despre subiectul acesta, bine?

— Ba da, ba da!

— La şcoală nu se pune accentul suficient pe noţiunile fundamentale; trebuie petrecut cel mai mult timp încercând înţelegerea acestora, asupra acestui lucru ar trebui să se concentreze maximum de efort. Atâta timp cât nu sunt înţelese, nu se poate merge mai departe. în plus, ele reprezintă cel mai interesant lucru din matematică.

— *Şi care sunt noţiunile fundamentale?*

— Ne-am petrecut aproape tot timpul vorbind despre ele: ideile! sensul! Limbajul matematic, raţionamentul, demonstraţia, teoremele, semnul egal, *implicaţia.*

Chiar aşa, nu am vorbit încă despre implicaţie. Vrei să vorbim despre implicaţie?

— *Am un chef nebun de asta.*

— Dorinţa ta bruscă de cunoaştere mă copleşeşte.

— *De când ştiu că eşti mare bucătar.*

— îţi voi găti un mic meniu de implicaţii *al dente.*

Logicienii au creat un verb, „a implica”, şi un semn care îl reprezintă, săgeata => : „implică”. Acest semn nu se

aplică numerelor sau obiectelor geometrice de exemplu, nu se referă decât la propoziţii, referindu-se la valoarea lor de adevăr. De aceea, este clasat în rândul operatorilor *logici.*

Când scriu „P =^> Q”, pe care îl pot înţelege şi ca „dacă P, atunci Q”, ofer informaţia că valoarea de adevăr a lui P atrage după sine valoarea de adevăr a lui Q. Q se poate deduce din P printr-un raţionament logic.

Implicaţia şi egalitatea sunt, fără îndoială, cuvintele cele mai importante din matematică. Sunt fundamentale în elaborarea şi gestionarea oricărui raţionament. Acesta este motivul pentru care simbolurile corespunzătoare lor, => şi = se întâlnesc în toate domeniile matematicii, nu precum + sau //, care sunt semne ce au sens doar în domenii specifice ale universului matematic.

— Al dente! E cam greu de înghiţit săgeata dublă.

— *P=> Q.* Două propoziţii, fiecare putând fi adevărată sau falsă. Sunt deci patru posibilităţi.

— Patru? Fals poate implica adevărat?

— Poate! Oricât de ciudat ar părea, falsul poate implica atât adevărat, cât şi fals. Plecăm de la $1 = 3$, ceea ce este, evident, fals. Adun 2 de o parte şi de alta a egalului: obţin $1+2 = 3+2$, adică $3 = 5$, ceea ce este fals. Fals implică fals. Dar cum $1 = 3$, pot aduna 3 în partea stângă şi 1 în partea dreaptă şi obţin $1+3 = 3+1$, ceea ce este adevărat. Fals implică adevărat.

— Ce zi! Fals implică adevărat! 2+2 nu este egal cu 4!

— Nu este mereu egal, rectifică Ray. O singură situaţie este exclusă, adevărat implică fals. Nu se poate accepta ca, pornind de la un adevăr şi raţionând corect, să se ajungă la un rezultat fals, deoarece, dacă ar fi astfel, totul s-ar duce de râpă. Gânditorii greci spuneau: „din adevăr, nu poate izvorî fals”. Piatra unghiulară a raţionamentului şi încrederea pe care o avem în el se datorează unui principiu: dacă suntem în sfera adevărului şi raţionăm corect, rămânem în această sferă. Nu avem niciun risc de a cădea în sfera falsului. Cum am putea raţiona fără această

certitudine? Activitatea principală a matematicienilor pentru a produce rezultate constă în a alege propoziţii adevărate şi a *deduce* din ele alte propoziţii adevărate. Astfel, stocul de propoziţii adevărate nu va înceta să crească.

— *Crezi că aşa se întâmplă şi în viaţă?*

— Nu voi avansa pe acest teren alunecos.

— *Ce înseamnă a deduce?*

— *Deducere,* „a extrage”, în latină!

Lola bătu din palme:

— Eram sigură că îmi vei da o lovitură etimologică! Dar este o imagine frumoasă.

Lola tăcu şi se adânci într-o reflecţie profundă, pe care Ray o respectă.

— *Deci, a deduce înseamnă a extrage? Extrag o propoziţie dintr-o alta. îi dau naştere.*

Si cu un zâmbet fermecător:
>

— *Lola, geniu feminin al matematicii...*

— Hei, Lola, încotro?

— *Are legătură cumva cu condiţiile*

necesare şi suficiente?

— Ajungem unde trebuie! în viaţa de zi cu zi, folosim deseori expresiile „ajunge să”, „este nevoie să” sau „trebuie să”. Ce se înţelege din *„Este necesar* să fie frig pentru a ninge”?

— *Fără frig, nu ninge!*

— Dar nu „frig, deci ninge”!

— *Poate să fie frig fără să ningă.*

— Ce se înţelege din *„Este suficient* ca soarele să strălucească pentru a se crăpa de ziuă”?

— *Sunt sigură că s-a crăpat de ziuă de cum bate soarele.*

— Dar nu „s-a crăpat de ziuă, bate soarele”!

— *Chiar aşa, se poate să se crape de ziuă şi ca soarele să fie ascuns după nori, de exemplu.*

— Facem un duet perfect. Lola, eşti un... – reluă – eşti O as. Fie Q şi *P* două aserţiuni...

— *Aserţiune? Care este diferenţa faţă de propoziţie?*

— O propoziţie este o structură bine formată, deci care are un sens, dar care nu are o valoare de adevăr fixată, în timp

ce o aserţiune este o propoziţie considerată drept adevărată.

Deci fie Q şi *P* două aserţiuni. Q este o *condiţie necesară* pentru a avea *P* dacă, de îndată ce P este adevărată, obligatoriu *Q* este adevărată. Exemplu, *„D* este un paralelogram” este o condiţie necesară pentru „D este un romb”, ceea ce se scrie: *„D* este un romb” => *„D* este un paralelogram”. Atenţie aici, nu este uşor.

— *Nu există niciun romb care să nu fie, simt nevoia să spun* deja...

— Spune *deja.*

— *... care să nu fie deja paralelogram. Pe de altă parte, există paralelograme care nu sunt romburi.*

— Condiţia nu este suficientă! Ceea ce îmi permite să trec abil la ... *Q* este o *condiţie suficientă* pentru a avea *P* dacă, de îndată ce *P* este adevărat, Q este şi ea necesarmente adevărată. *„D* este un pătrat” este o condiţie suficientă pentru *„D* este un paralelogram”.

— *Este suficient să fie pătrat pentru a fi paralelogram. Altfel spus, precum zici tu: toate pătratele sunt paralelograme. Dar aceasta nu este o condiţie necesară,*

deoarece ar fi adevărat şi dacă D ar fi un dreptunghi.

— Şi scriu „*D* este un pătrat” => „*D* este un paralelogram”. Şi apoi, este, cum îi spuneţi voi? Acel *must. Must* este condiţia necesară ŞI suficientă! Matematicienii se dau în vânt după ea. Semnul, mai întâi: o săgeată dublă. Ce înseamnă P => Q? Dacă *P* este adevărat, Q este adevărată şi dacă Q este adevărată, *P* este adevărat. Ceea ce înseamnă că P şi Q sunt simultan adevărate sau false. Matematicienii îşi petrec timpul încercând să găsească propoziţii echivalente. Deoarece, dacă am una dintre ele, o am şi pe cealaltă. Uneori spunem că „P este adevărată *dacă şi numai dacă* Q este adevărată”.

— *Profesorul nu încetează să repete: trebuie să vă ştiţi formulele.*

— O formulă eu o văd ca pe o formă de calcul, o scriere condensată ce foloseşte numai simboluri, un fel de „program” informatic. Din acest motiv, formulele sunt programabile pe un calculator.

Formulele sunt considerate ca nişte poveri de către majoritatea elevilor, dar

vrei să-ţi spun sincer? Ele sunt un adevărat cadou pentru elevi, încearcă să rezolvi o problemă, nu contează care, fără a utiliza nicio formulă. îti urez multă baftă. Abia atunci vei veni la mine: „Ray, te rog frumos, dă-mi formule.”

— Şi tu ce-mi vei răspunde?

— Voi deschide cufărul comorii, plin de formule ce strălucesc în mii de culori, şi îţi voi spune: alege-ţi!

— Elevii au noroc deci?

— Am putea-o spune. La origini, *formulă* era folosită în medicină, pentru a desemna regulile după care un remediu trebuia administrat. în afara acestor reguli, utilizarea remediului provoca accidente. La fel se întâmplă şi cu o formulă matematică: trebuie obligatoriu precizată situaţia în care aceasta a fost elaborată şi condiţiile în care ea trebuie aplicată.

în majoritatea cazurilor, problemele puse elevilor se referă la domenii în care există formule! Pentru început, trebuie aleasă formula necesară, dintre toate cele pe care le oferă cursul. Apoi, trebuie verificat să fie identice condiţiile

problemei şi cele ale formulei. Odată efectuată această verificare, nu mai rămâne decât să *aplici* formula, prin înlocuirea literelor ce figurează în formulă cu cele omoloage din problemă. Apoi, apoi, formula face singură toată munca!

Deseori, se consideră că expresia matematică ESTE formula. Greşit, formula este formată din expresia matematică ŞI prezentarea situaţiei, adi-

că a condiţiilor în care este validă. O formulă nu este „*x =* ~4gg)» cj „pie ecuaţja ¿e gradul

2a

al doilea cu o singură necunoscută, $ax^2+bx+c=0$. Dacă expresia $b^2-4ac>Q$, ecuaţia are două rădăcini,

-b+^b²-4ac .

x' =--------Ta-----Ş1X' = $\frac{-b-fb^2-4ac}{2a}$

Dintr-odată, Lola întrebă:

— *Ţie, personal, ţi se pare că matematica este simplă sau complicată?*

— Nu este simplă, deloc.

— *„E simplu, Lola, TREBUIE să ajungi la concluzie!” De câte ori am auzit asta! Dar dacă este simplu ŞI eu nu ajung la bun sfârşit, înseamnă că sunt proastă, nu?*

— Oh! O dovadă de deducţie corectă. Nu, eu nu-ţi voi spune aşa ceva, eu îţi spun „E dificil, Lola, dar vei ajunge la final.”

— *în final, avem dreptul de a nu iubi matematica?*

— Nu putem obliga pe nimeni să

iubească ceva sau pe cineva. Iubirea nu se ordonă, dar se poate învăţa a iubi ceva ce nu ne place.

— *Ceva ce nu ne place deloc deloc?*

— Nu este niciun risc să încerci. Da, avem dreptul de a nu ne plăcea matematica, după cum avem dreptul de a nu ne plăcea alte materii. Dar nici nu este un titlu de glorie a le detesta pe toate. Este totuşi preferabil să le cunoşti puţin înainte să declari, definitiv, că nu îţi plac. Bunica ta îmi spunea mereu: „întâi gustă, apoi vei putea spune că nu îţi place”.

— *Ceea ce faci tu cu mine, aici, este să mă faci să gust nişte matematică?*

— într-o oarecare măsură. Iar degustarea nu s-a încheiat. Mai avem destule domenii de vizitat.

— *Nu s-a încheiat? Am avut mereu impresia că am descoperit deja totul în matematică şi nu mai rămâne nimic de aflat!*

— Ai pune această întrebare la fizică, la biologie sau la geografie? Nu. Nu au existat niciodată atâţia matematicieni, atâtea rezultate noi, atâtea teorii noi,

atâtea întrebări, atâtea probleme enunţate. în fiecare zi, chiar în fiecare oră, noi teoreme sunt demonstrate. Oh, nu neapărat foarte interesante, dar sunt rezultate inedite, care nu fuseseră demonstrate înainte.

De 2500 de ani, în majoritatea civilizaţiilor, au existat fără încetare matematicieni. în fîeca- re epocă, s-au confruntat cu două tipuri de probleme. Probleme vechi, nerezolvate încă, şi probleme noi, legate de noile matematici. Probleme vechi, care rezistaseră tentativelor matematicienilor precedenţi, erau rezolvate, deoarece noi instrumente de lucru fuseseră create, noi rezultate erau stabilite, noi teorii erau construite, care le lipsiseră matematicienilor din generaţiile precedente. Noi discipline au fost create, trigonome- tria, teoria probabilităţilor, geometria analitică, statistica...

Un alt proces face ca tărâmul matematicii să fie inepuizabil: crearea de noi obiecte. Iată cum anume are loc acest lucru. Un matematician hotărăşte să studieze o familie de obiecte. Are nevoie

de instrumente. Dacă cele aflate la dispoziţia sa nu sunt suficiente, este împins să construiască unele noi. Or instrumentele în cauză sunt şi ele noi obiecte matematice. Iată cum este creată o nouă familie de obiecte. Matematicianul decide să le studieze. Pentru aceasta, are nevoie de noi instrumente, care vor fi, la rândul lor, obiect de studiu... Fluviul matematicii nu este gata de a seca.

— *Vrei să spui că, în generaţiile viitoare, copiii nu pot spera că nu vor mai exista noi matematici?*

— Exact, mai bine nu s-ar baza pe asta.

— *Şi cu „cucuiul matematicilor“ cum rămâne?*

— Ce-i cu el?

— *Ai întâlnit oameni care să îl aibă?*

— îmi place când faci pe naiva! Am întâlnit persoane foarte dotate pentru matematică, altele care cântau minunat la pian, altele care desenau divin, altele care erau nemaipomenite la alergări. Dar niciodată nu am auzit vorbindu-se de cucuiul muzicii, al desenului sau al atletismului.

— *Atunci de ce matematica este*

singurul domeniu care are un „cucui“?

— Pe la 1800, un anume Franz Gali, medic anatomist, a crezut că a observat o excrescenţă la nivelul craniului. El s-a grăbit să tragă concluzia că era semnul unei aptitudini remarcabile pentru matematică. Astfel lua naştere cucuiul matematicilor! Nimic însă nu a venit ulterior să confirme declaraţiile lui Franz Gali. Cum cucuiul era zdravăn, expresia a rămas. Ceea ce a permis multor oameni care nu înţelegeau nimic din matematică să motiveze că ar fi din cauza cucuiului pe care nu-l aveau şi fără de care nu puteau face nimic. Fără cucui, nicio speranţă! Pe de altă parte, studii recente au permis localizarea unor zone ale creierului „specializate” în diverse operaţii aritmetice, adunarea ici, înmulţirea colea.

Ray se întrerupse:

— Hei, era să uit. Cum se comportă implicaţia în cazul propoziţiilor negative? *„D* este un pătrat” => *„D* este un paralelogram”. Dacă facem trecerea la propoziţii negative? Ce ţi-ai dori să se întâmple, Lola?

— *Ar trebui să-mi doresc ceva?*

Privirea insistentă a lui Ray o incită să-şi dorească ceva:

— As *spune „D nu este un pătrat” => „D nu este un paralelogram”. Dar, dacă îmi pui această întrebare, probabil că nu se întâmplă astfel.*

— Să analizăm! Dacă *D* nu este un pătrat, ar putea fi, de exemplu, un paralelogram. Am avea deci *„D* este un paralelogram” => *„D* nu este un paralelogram”.

— *Oroarea ororilor, nu-i asa?*

— Ba chiar mai mult. Eroarea pe care tocmai ai făcut-o este una dintre cele mai des întâlnite.

Atunci când se trece la propoziţiile negative, se schimbă sensul implicaţiei

Dacă *P=> Q,* atunci *(non* Q) => *(non P)* şi nu *(non P) => (non* Q).

— *Tot ceea ce nu este adevărat este fals. Acest lucru mi se pare simplist. între apa care fierbe şi cea îngheţată există intermediari...*

— „Astăzi, 1 ianuarie 2008, numărul de degete de la mâinile Lolei devine

unsprezece.” Este fals, nu pe jumătate fals. Propoziţiile studiate în matematică nu au decât două posibilităţi, adevărate, false. Este destul de sumar, e drept, dar există o mulţime de propoziţii în viaţă care sunt în aceeaşi situaţie.

— Omul era „pe jumătate mort”!

— Un om pe jumătate mort este în viaţă. Din nefericire, atunci când eşti mort, nu eşti doar pe jumătate.

Se lăsă liniştea.

— în matematică, trebuie justificat tot ceea ce afirmi?

— încă un lucru care îţi va plăcea. Sunt interzise „vezi ceea ce vreau să spun”, „este evident”, „ai încredere în ceea ce îţi spun”. Ceea ce ar părea evident este uneori fals. Şi ceea ce pare fals se dovedeşte uneori adevărat. Este adevărat în matematică, este adevărat şi în viaţă.

— în matematică încrederea nu este suverană!

— Chiar aşa, nu are nimeni încredere *apriori.* Orice propoziţie afirmată nu este acceptată decât dacă este însoţită de

demonstraţia sa. Dar, atunci când este acceptată, i se acordă o încredere absolută. Nu avem încredere în oameni, dar avem încredere oarbă în ceea ce au stabilit.

— Dacă vrei să îţi spun, pentru mine, rigoarea are un aer militar.

— Asta e „matematica în kaki”! Totuşi, ar trebui să meditezi la acest lucru, care nu este prea militar, chiar dimpotrivă. în matematică, o afirmaţie nu este adevărată deoarece eu – şeful, regele, preotul, stăpânul – sunt cel care o spune, nu este adevărată pentru că eu sunt cel mai puternic. Este adevărată pentru că îţi aduc dovada în acest sens şi tu poţi singură să-i verifici acurateţea.

Lola aprobă clătinând din cap.

— Nu vorbim despre rigoare decât în matematică! Nu şi la franceză, la geografie, nici măcar la fizică.

— Totuşi, nu crezi că există rigoare în poezie? Un poem este orice, numai nu cuvinte aruncate unul după altul, are muzicalitate, măsură a versurilor, asonanţe. Toate acestea sunt dovezi ale

rigorii. Sau muzica?

Ei bine, este o greşeală să nu se vorbească despre aceasta decât la matematică. Fiecare domeniu are rigoarea sa. Trebuie spus şi faptul că în matematică, mai mult decât în alte părţi, ea are un rol creator. Explic: uneori, datorită implicării rigorii în tratarea unei probleme, s-a putut descoperi ceea ce nu se putea vedea prea clar atâta timp cât eram într-o stare de imprecizie. O mare parte a puterii – şi a interesului – matematicii provine de la rigoarea la care apelează în definirea obiectelor, în stabilirea rezultatelor, în investigarea dovezilor pe care le elaborează. Această rigoare, din punct de vedere psihologic, putem să nu o îndrăgim.

— *Atunci?*

— Atunci nu am iubi matematica şi nici nu am muri din atâta lucru.

— *La ce foloseşte matematica?*

— Iubirea la ce foloseşte?

— *Compari iubirea cu matematica?*

— Ceea ce este important trebuie neapărat să „folosească”?

Ce este folositor pe lumea asta?

— *Dar nu merg la liceu să învăţ despre iubire sau prietenie.*

— Ci să înveţi?

— *Să învăţ, exact.*

— Ce să înveţi?

— *Ceea ce îmi va folosi.*

— Şi ce este ceea ce îţi va folosi?

— *Asta tu ştii.*

>

— Dar tu ce-ai vrea să înveţi, să ştii, să înţelegi?

— *Mă voi gândi la asta,* spuse ea cu voce joasă. *E rândul meu, Ray! Sunt curioasă să ştiu ce poate să-ţi placă în matematică.*

— De ce mă întrebi ce *poate* să-mi placă în matematică şi nu, pur şi simplu, ce-mi place? Chiar eşti curioasă să afli?

— *Eh... în sfârşit, da.*

— Fineţea, rigoarea, eficienţa, precizia, eleganţa raţionamentelor, surprizele pe care ni le rezervă şi frumuseţea.

— *Frumuseţea?*

— Exact, FRUMUSEŢEA. Există demonstraţii elegante şi altele necizelate, stângace.

— Măcar acum este clar. Suntem complet opuşi, suntem...

— Spune-o!

— Diametral opuşi.

— Ce vrei să spui prin asta?

— Că nu putem fi mai opuşi decât suntem.

— Vezi, matematica este folositoare!

Privindu-l pe Ray cu emoţie:

— Nu am petrecut niciodată atâta timp împreună. îmi pare rău doar de faptul că nu ai stat tot atâta timp să te joci cu mine.

— Nu este niciodată prea târziu pentru a începe.

Cuprins

La ce se referă matematica?................. 5
Numerele... 21
Geometrie.. 51
Algebră... 77
Puncte şi legături................................ 91
Problemele.......................................101
Raţionamentul...................................109